บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อประมาณค่าและเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้จากแบบจำลอง GARCH และ FIGARCH ของอัตราผลตอบแทนของดัชนีราคาหลักทรัพย์ในตลาดหลักทรัพย์ไทย สิงคโปร์ มาเลเซีย อินโดนีเซีย และฟิลิปปินส์ โดยใช้แบบจำลอง GARCH และ FIGARCH ที่ค่าความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปกติ, นอร์มอลอินเวอร์สเกาส์เซียน (Normal Inverse Gaussian (NIG)) และstudent's t ซึ่งข้อมูลที่นำมาศึกษามีลักษณะเป็นอนุกรมเวลา (time series) ดังนั้นจึงได้นำแนวคิดและทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้องได้แก่ แบบจำลอง GARCH และแบบจำลอง FIGARCH ที่ค่าความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปกติ, นอร์มอลอินเวอร์สเกาส์เซียน (Normal Inverse Gaussian (NIG)) และstudent's t แบบจำลองความเบ้และความโด่ง (Skewness and Kurtosis) แบบจำลอง Quasi-likelihood การตรวจสอบรูปแบบ (Diagnostic Checking) เทคนิค QQ-plot ซึ่งแนวคิดและทฤษฎีต่างๆ มีดังต่อไปนี้

โดยทั่วไปสมการในแบบจำลองเชิงเส้นแบบสถิต (static linear model) คือ

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \tag{2.1}$$

โดยที่ ε_i คือ error term

และ ε_i ถูกสมมติว่าเป็นตัวแปรสุ่ม (random variable) ที่มีการแจกแจกแบบปกติ (normal distribution) และความแปรปรวนมีค่าคงที่ (constant variance) ดังสมการ

$$E(\varepsilon_i - 0)^2 = E(\varepsilon_i)^2 = \sigma_\varepsilon^2 \tag{2.2}$$

ต่อมา Engle (1982) ได้สร้างแบบจำลอง Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH) เพื่อแสดงความแปรปรวนที่เปลี่ยนตามเวลา (time-varying variance) สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (2.3)

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_i^2$$
$$= \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 \qquad (2.3)$$

ในสมการที่ (2.3) σ_t คือ ความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) ของ ε_t และเปลี่ยนแปลงตามเวลา โดยที่แบบจำลองมีข้อจำกัดว่าผลรวมของ $\alpha_i > 0$ และ $\alpha = 1$ และเพื่อให้สามารถประมาณความแปรปรวนที่ติดลบ (negative variance) Bollerlev (1986) จึงได้สร้างแบบจำลอง Generalized ARCH (GARCH) โดยพัฒนาจากแบบจำลอง ARCH โดยที่แบบจำลอง GARCH ได้รวมเอา error term (ε_i) และความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) ในอดีต ไว้ในแบบจำลองด้วย ดังสมการ

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sum_{t=2}^{n} \sigma_{t-1}^2 \qquad (2.4)$$

ความผันผวน (volatility) ของอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์จะเพิ่มขึ้นมากกว่าที่คาดการณ์ (expected) ไว้ จากข่าวสารในด้านลบ (negative information) ถ้าข้อมูลอนุกรมเวลา (time series) มีลักษณะไม่สมมาตร (asymmetry) ทั้งนี้แบบจำลอง GARCH ที่สามารถจับลักษณะความไม่สมมาตร (asymmetry) ในผันผวน (volatility) ได้ เป็นแบบจำลองแรกก็คือ Exponential GARCH ที่สร้างโดย Nelson (1991) ดังสมการ

$$\ln(\sigma_t) = \delta + (1 + \alpha_1 L) f(u_{t-1} \mid \sigma_{t-1}^{1/2}) + \beta_1 \ln \sigma_{t-1} \qquad (2.5)$$

โดยที่

$$f(u_{t-1} \mid \sigma_{t-1}^{1/2}) = \theta u_{t-1} + \gamma(| u_{t-1} \mid \sigma_{t-1}^{1/2} | - E \mid u_{t-1} \mid \sigma_{t-1}^{1/2} |) \qquad (2.6)$$

ในสมการที่ (2.6) ได้เพิ่มพารามิเตอร์ที่แสดงถึงการไม่สมมาตร (asymmetry) ไว้ในแบบจำลอง เมื่อ θ แสดงถึงสัญลักษณ์ของ error term ที่มีผลต่อความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) และ γ แสดงถึงขนาดของผลกระทบ (effect) นั่นคือถ้าข้อมูลอนุกรม (time series) มีลักษณะไม่สมมาตร (asymmetry) แล้ว θ จะมีค่าน้อยกว่าศูนย์

Gloslen, Jagannathan and Runkle (1993) และ Zakoian (1994) กล่าวว่าลักษณะที่ไม่สมมาตรในความผันผวนของอัตราผลตอบแทน (return volatility) สามารถสร้างได้โดยการเพิ่มตัวแปรหุ่น (dummy variable) เข้าไปในแบบจำลอง GARCH สำหรับแบบจำลอง GJR (Threshold GARCH model) สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (2.7)

$$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 \mu_{t-1}^2 + \gamma_i \mu_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1} \tag{2.7}$$

ในสมการ (2.7) ถ้า μ_{t-1} มากกว่าศูนย์, I_{t-1} เท่ากับ 1 หรือเท่ากับ 0 ARCH parameters ในความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) จะมีค่าอยู่ระหว่าง $\alpha_1 + \gamma_1$ และ α_1 ข่าวสารในด้านบวก (positive news) จะมีผลกระทบต่อ α_1 ในขณะที่ข่าวสารในด้านลบ (negative news) จะมีผลกระทบต่อทั้ง α_1 และ γ_1 ถ้า γ_1 มีค่ามากกว่า 1 แสดงว่าข้อมูลไม่สมมาตร (asymmetry) ถ้า γ_1 มีค่าเท่ากับ 0 แสดงว่าข้อมูลสมมาตร (symmetric)

ในแบบจำลอง GARCH (p,q) ถ้า $\alpha_{1,\ldots p} + \beta_{,\ldots,q1} < 1$ ในกรณีที่เกิด shock จะมีผลทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) ซึ่งเป็นที่รู้จักว่าเป็น decay factor เมื่อ $\alpha_{1,\ldots p} + \beta_{,\ldots,q1} = 1$ ความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) จะมีลักษณะคล้ายกระบวน unit root ดังนั้นแบบจำลอง GARCH (p,q) จึงมีข้อกำหนดว่า $\alpha_{1,\ldots p} + \beta_{,\ldots,q1} < 1$ (Harris ve Sollis, 2003)

ในข้อมูลอนุกรมเวลา (time series) ที่มีความถี่สูง (high frequency) ผลรวมของพารามิเตอร์แอลฟาและเบต้าสำหรับการประมาณค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) จากแบบจำลอง GARCH(p,q) มีค่าเข้าใกล้ 1 หรือเท่ากับ 1 ซึ่งหมายความว่าผลกระทบของความผันผวน (volatility effect) ของข้อมูลล่าสุด (last observations) ใน dataset เพิ่มขึ้น

กระบวนการ GARCH (p,q) สามารถถูกสร้างเป็นกระบวนการ ARMA โดยใช้ lag operator ดังสมการที่ (2.8)

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)]\varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)](\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2) \tag{2.8}$$

โดยที่ $\left[1-\alpha(L)-\beta(L)\right]$ มี unit root ผลรวมของพารามิเตอร์แอลฟาและเบต้าเท่ากับ 1 ซึ่งก็คือแบบจำลอง Integrated GARCH (IGARCH) ของ Engle, Bollersler (1986) สามารถแสดงสมการได้ดังนี้

$$\phi(L)(1-L)\varepsilon_t^2 = \omega + [1-\beta(L)](\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2) \tag{2.9}$$

จัดรูปสมการที่ (2.9) ใหม่ จะได้

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1-\beta(L)} + \left\{1-\phi(L)(1-L)[1-\beta(L)]^{-1}\varepsilon_{t-1}^2\right\} \tag{2.10}$$

Baillie, Bollerslev and Mikkelsen (1996) ได้สร้าง Fractionally Integrated GARCH (FIGARCH) โดยการแทน lag operator ด้วย $(1-L)^d$ ในแบบจำลอง IGARCH ดังแสดงในสมการที่ (2.11)

$$\phi(L)(1-L)^d\varepsilon_t^2 = \omega + [1-\beta(L)](\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2) \tag{2.11}$$

ความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) ในแบบจำลอง FIGARCH ของ Baillie, Bollerslev and Mikkelsen (1996) สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (2.12)

$$\sigma_t^2 = \omega[1-\beta(L)]^{-1} + \left\{1-[1-\beta(L)]^{-1}\phi(L)(1-L)^d\right\}\varepsilon_t^2 \tag{2.12}$$

โดยที่ $\lambda(L) = \left\{1-[1-\beta(L)]^{-1}\phi(L)(1-L)^d\right\}\varepsilon_t^2, 0 < d < 1$

จะได้

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1-\beta(L)} + \lambda(L)\varepsilon_t^2 \tag{2.13}$$

(Cifter and Ozun, 2007)

2.1.1 แบบจำลอง Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH)

Bollerslev (1986) ได้ขยายมาจาก ARCH model โดยมีขั้นตอน คือให้ค่าความคลาดเคลื่อนจากกระบวนการเป็นดังสมการ (2.14)

$$\varepsilon_t = \nu_t \sqrt{h_t} \tag{2.14}$$

โดยที่ความแปรปรวนของ $\nu_t = \sigma_\nu^2 = 1$ และ

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} \tag{2.15}$$

เนื่องจาก $\{\nu_t\}$ เป็น White Noise Process ซึ่งเป็นอิสระกับ (ε_{t-1}) ค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขและไม่มีเงื่อนไข (conditional and unconditional means) ของ ε_t จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ใส่เครื่องหมาย (expected value) ของ ε_t จะได้

$$E\varepsilon_t = E\nu_t \sqrt{h_t} = 0 \tag{2.16}$$

ประเด็นที่สำคัญ คือความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข (conditional variance) ของ ε_t ถูกกำหนดโดย

$$E_{t-1}\varepsilon_t^2 = h_t \tag{2.17}$$

ดังนั้นความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของ ε_t จึงถูกกำหนดโดย h_t ในสมการ (2.17) แบบจำลองนี้จึงถูกเรียกว่า Generralized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity ซึ่งใช้ตัวย่อว่า GARCH (p,q) ได้เปิดโอกาสให้มีทั้งส่วนประกอบที่เป็น Autoregressive Moving Average ในความแปรปรวนที่มีลักษณะ Heteroscedastic Variance จะเห็นได้ว่า ถ้า p=0 และ q=1 เราก็จะได้แบบจำลอง GARCH (0,1) ซึ่งก็คือ ARCH (1) หรือ ARCH (q=1) นั่นเอง และเพื่อทำให้ความ

แปรปรวนแบบมีเงื่อนไขเป็นอันตะ (finite) รากลักษณะเฉพาะ (characteristic roots) ของสมการ (2.17) ต้องอยู่ในวงกลมหนึ่งหน่วย

เนื่องจากแบบจำลอง GARCH มีลักษณะเป็น ARMA process ACF (autocorrelation function) และ PACF (partial autocorrelation function) ของส่วนตกค้างหรือส่วนที่เหลือจะเป็นเครื่องชี้เกี่ยวกับ White-Noise Process อย่างไรก็ตาม ACF ของส่วนที่เหลือหรือส่วนตกค้างกำลังสอง (squared residual) สามารถระบุถึง order ของ GARCH process ได้

เนื่องจาก $E_{t-1}\varepsilon_t = \sqrt{h_t}$ สามารถเขียนสมการ(3.18) ได้ดังนี้

$$E_{t-1}\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-i} \tag{2.18}$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (2.18) มีลักษณะคล้ายกับ ARMA (q,p) ใน $\{\varepsilon_t^2\}$ sequence มาก ถ้า heteroscedasticity แบบมีเงื่อนไขมีอยู่จริง แผนภาพสหสัมพันธ์ (correlogram) จะเป็นตัวบ่งบอกกระบวนการดังกล่าว (Ender, 2004)

2.1.2 แบบจำลอง Fractionally Integrated GARCH (FIGARCH)

แบบจำลอง FIGARCH (*p,d,q*) จากการศึกษาของ Baillie et al. (1996) ที่สามารถจับการลดลงอย่างช้าๆที่ยาวนาน (hyperbolic decay) ในกระบวนการการผันผวน (volatility process) ถูกกำหนดดังสมการ

$$\phi(L)(1-L)^d\varepsilon_t^2 = \omega + [1-\beta(L)]\nu_t \tag{2.19}$$

โดย $\phi(L) = [1-\beta(L)-\alpha(L)]$ และที่ทุกรากของ $\phi(L)$ และ $[1-\beta(L)]$ อยู่ภายนอกวงกลมหน่วย (unit circle) $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ และ $0 < d < 1$ $\phi(L)$ คือ infinite order polynomial

จากสมการที่ (2.19) เมื่อ d มีค่าเท่ากับศูนย์ แบบจำลอง FIGARCH จะลดรูปกลายเป็นแบบจำลอง GARCH และเมื่อ d มีค่าเท่ากับหนึ่ง จะลดรูปกลายเป็นแบบจำลอง IGARCH เมื่อจัดรูปแบบสมการที่ (2.19) จะสามารถเขียนสมการสำหรับแบบจำลอง FIGARCH ได้ดังนี้

$$[1-\beta(L)]\sigma_t^2 = \omega + [1-\beta(L)-\phi(L)(1-L)^d]\varepsilon_t^2 \tag{2.20}$$

จากสมการข้างต้นความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) ของ ε_t หรือ infinite ARCH ซึ่งเป็นตัวแทนของกระบวนการ FIGARCH จะเป็น

$$\sigma_t^2 = \omega(1-\beta(1)) + \left[1-\frac{\phi(L)}{1-\beta(L)}(1-L)^d\right]\varepsilon_t^2 = \frac{\omega}{1-\beta(1)} + \lambda(L)\varepsilon_t^2 \tag{2.21}$$

โดย $\lambda(L) = \lambda_1 L + \lambda_2 L^2 + \ldots$ และค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) เป็นค่าบวกสำหรับทุกค่า t และค่าสัมประสิทธิ์ของ infinite ARCH ในสมการที่ (2.21) ต้องมีค่าเป็นบวก (nonnegative) นั่นคือ $\lambda_j \geq 0$ เมื่อ j=1,2,3,… สำหรับค่า d จะมีค่าอยู่ในช่วง $0 < d \leq 1$ โมเมนต์ที่สองของการกระจายแบบไม่มีเงื่อนไข (unconditional) ของส่วนที่เหลือยกกำลังสอง (squared residuals, ε_t) จะมีค่าที่ไม่รู้จบ (infinite) ซึ่งคล้ายกับวิธีการแบบ IGARCH และจะได้ว่าวิธีการแบบ FIGARCH จะไม่มีลักษณะ covariance stationary สำหรับวิธีการแบบ FIGARCH (*p*,*d*,*q*) จะมีลักษณะนิ่งแบบเข้มงวด (strictly stationary) และ ergodic สำหรับ $0 < d < 1$ แต่จะไม่มีลักษณะของ square integrable (Kilic, 2006)

ในแบบจำลอง GARCH และ FIGARCH ค่าแอมปิจูด (amplitude) คือค่าที่ระบุถึงขนาดความผันผวนของความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) และค่าแอมปิจูด (amplitude) หาได้จากผลรวมของสัมประสิทธิ์ในสมการ ARCH (∞) ในแบบจำลอง GARCH และ FIGARCH สำหรับ covariance stationary คือเงื่อนไขที่ว่า ค่าแอมปิจูด (amplitude) สามารถมีค่าน้อยกว่าหนึ่งได้ ซึ่งจากการศึกษาของ Davidson (2004) พบว่าสำหรับแบบจำลอง GARCH(1,1) มีค่าแอมปิจูด (amplitude) เท่ากับ $\alpha_1/(1-\beta_1)$ และมีค่า covariance stationary เท่ากับ $\alpha + \beta < 1$ และสำหรับแบบจำลอง FIGARCH(1,*d*,1) ค่าแอมปิจูด (amplitude) ถูกจำกัดว่าต้องมีค่าเท่ากับหนึ่ง และดังนั้นแบบจำลอง FIGARCH จึงไม่มี covariance stationary

คุณสมบัติอีกประการที่สำคัญและมีประโยชน์อย่างยิ่งของแบบจำลอง GARCH และ FIGARCH คือ การมีความจำ (memory) ในกระบวนการความผันผวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional volatility) (Baillie et al.,1996; Zaffaroni, 2000 ;และ Davidson, 2004) สำหรับความจำ (memory) ในแบบจำลอง GARCH และ FIGARCH นั้นจะระบุถึงระยะเวลาของ shock ที่จะทำให้ค่าความผันผวน (volatility) หายไป ในการศึกษาเรื่องความจำ (memory) ในแบบจำลอง GARCH และ FIGARCH นั้นสามารถแบ่งระดับของความจำ (memory) ได้เป็น 2 ระดับ คือ ความจำระยะสั้น

(geometric (short) memory) และความจำระยะยาว (hyperbolic (long) memory) สำหรับแบบจำลอง GARCH ที่นิ่ง (stationary) ค่อนข้างจะมีคุณสมบัติเป็นคือ ความจำระยะสั้น (short memory) คือ shock มีผลกระทบต่อเนื่องที่สั้น หรือเรียกว่า“short-lived effects” ในความผันผวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional volatility) ส่วนกระบวนการของแบบจำลอง FIGARCH (FIGARCH process) แสดงถึงการเกิดอัตราที่ลดลงอย่างช้าๆที่ยาวนาน (hyperbolic rate of decay) สำหรับอัตสหสัมพันธ์ (autocorrelation) ของส่วนที่เหลือยกกำลังสอง (squared residuals, ε_t^2) ซึ่งเป็นลักษณะของกระบวนการความจำระยะยาว (long memory)

จากงานวิจัยของ Davidson ได้ศึกษาถึงสมบัติหลายๆ ประการของความจำ (memory) ของแบบจำลอง GARCH, IGARCH และ FIGARCH ผลการศึกษาแสดงถึงระยะเวลาของความจำ (memory) ของกระบวนการความผันผวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional volatility) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ในแบบจำลอง นอกจากนี้งานวิจัยของ Davidson ยังศึกษาถึงการวัดความจำ (memory) โดยที่ความจำระยะสั้น (geometric memory) สามารถหาค่าได้จาก $\theta_i = o\left(\rho^{-i}\right)$[1] และความจำระยะยาว (hyperbolic (long) memory) สามารถหาค่าได้จาก $\theta_i = o\left(\rho^{-i-\delta}\right)$ โดย ρ และ δ ถูกกำหนดโดยค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง GARCH, IGARCH และ FIGARCH ตามลำดับ นอกจากนี้ ในการศึกษายังชี้ให้เห็นถึงระยะเวลาของความจำ (memory) ซึ่งแปรผกผันกับ ρ และ δ ตัวอย่างที่สามารถเห็นได้ชัดคือ ในแบบจำลอง GARCH(1,1) ที่เป็นแบบความจำระยะสั้น (short memory) จาก $\rho = \dfrac{1}{\beta}$ พบว่า ยิ่ง β_1 มีค่ามากขึ้นเท่าใด จะทำให้ระยะเวลาของความจำ (memory) ในแบบจำลอง GARCH(1,1) มีค่าสั้นลงเท่านั้น แต่สำหรับความจำ (memory) ในกระบวนการ FIGARCH (p, d, q) กลับต่างออกไป คือ กระบวนการจะเพิ่มขึ้นเมื่อค่า d เข้าใกล้ศูนย์หรือมากกว่าหนึ่ง

นอกจากนี้ผลการศึกษาของ Davidson พบว่าระยะเวลาของการยึดติด (persistence) ของ shock ต่อความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขจะมีความสัมพันธ์แบบตรงข้ามกับตัวพารามิเตอร์ไฮเปอร์โบลิก เดคาย (hyperbolic decay , d)ในแบบจำลอง FIGARCH (p,d,q) และในแบบจำลอง FIGARCH (p,d,q) ระยะเวลาของความจำ (memory) ของกระบวนการนั้นจะเพิ่มขึ้นเมื่อค่า d มีค่าเข้าใกล้ศูนย์

---

[1] แบบจำลอง FIGARCH(p,d,q) สามารถเขียนได้ในรูป fractional difference ดังสมการ $\theta(L) = 1 - \dfrac{\delta(L)}{\beta(L)}(1-L)^d$ โดย 0<d<1และสามารถจัดรูปได้เป็น $(1-L)^d = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} a_j L^j$ โดยที่ $a_j = \dfrac{d\Gamma(j-d)}{\Gamma(1-d)\Gamma(j+1)} = o\left(j^{-1-d}\right)$

ดังนั้นเมื่อค่า d เพิ่มขึ้นจนเป็นหนึ่ง หรือเมื่อแบบจำลอง FIGARCH ลดรูปลงไปเป็นแบบจำลอง IGARCH ความจำ (memory) จะกลายเป็นความจำระยะสั้น (short memory) และเมื่อค่า d มีค่าลดลงเข้าใกล้ศูนย์ (แต่ไม่ใช่กลายเป็นศูนย์อย่างแท้จริง) ระยะเวลาของกระบวนการจะเพิ่มขึ้น เมื่อค่า d มีค่าเท่ากับศูนย์ กระบวนการจะกลายเป็นแบบจำลอง GARCH ที่มีความจำระยะสั้น (short memory GARCH) ทันที ลักษณะของแบบจำลอง FIGARCH ที่ใช้เป็นตัวเชื่อมโยงระหว่างแบบจำลอง GARCH และ IGARCH นั้นอาจเกิดการเข้าใจผิด แท้จริงแล้วกระบวนการ FIGARCH จะมี ความจำ (memory) มากกว่าในแบบจำลอง GARCH และ IGARCH

2.1.3 การแจกแจงค่าความคลาดเคลื่อนแบบนอร์มอลอินเวอร์สเกาส์เซียน (Normal Inverse Gaussian (NIG) Error distribution)

การแจกแจงค่าความคลาดเคลื่อนแบบนอร์มอลอินเวอร์สเกาส์เซียน (Normal Inverse Gaussian (NIG)) นำเสนอโดย Barndorff-Nielsen (1997), Andersson (2001), Jensen และ Lunde (2001) โดยที่ Normal Inverse Gaussian (NIG) เป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่องที่ถูกกำหนดเป็น normal variance-mean mixture[2] สำหรับตัวแปรที่ใช้ในฟังก์ชันความหนาแน่น (density function) ของการแจกแจงแบบ NIG คือ ตัวแปรสุ่ม X ดังสมการต่อไปนี้

$$NIG(x:a,b,\mu,\delta)=\frac{a}{\pi\delta}\exp\left(\sqrt{a^2-b^2}+b\frac{x-\mu}{\delta}\right)+q\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^{-1}K_1\left(aq\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right) \quad (2.22)$$

โดย $q(y)=\sqrt{1+y^2}$ ซึ่ง $0\le|b|\le a, \mu\in R, \delta>0$ และเทอม $K_1(.)$ แสดงถึง Bessel function[3] พารามิเตอร์ความชัน (steepness parameter, a) จะแสดงถึงความชัน และพารามิเตอร์

[2] normal variance-mean mixture with mixing probability density เป็น continuous probability distribution ของตัวแปรสุ่มY ที่อยู่ในรูป $Y=\alpha+\beta V+\sigma\sqrt{V}X$ เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริง และ $\sigma>0$ ตัวแปรสุ่ม X และ V เป็นอิสระ โดยที่ X เป็น normal distributed ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1 เป็น continuous probability distribution ที่มีค่าเป็นบวกตามแนวแกน X ด้วย probability density function g ดังนั้น conditional distribution ของ Y given V จึงเป็น normal distribution ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\alpha+\beta V$ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2

[3] Bessel function (Bessel's different equation) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\alpha^2)y=0$

ความไม่สมมาตร (asymmetry parameter, b) แสดงถึงความไม่สมมาตรของการแจกแจง ดังนั้นการแจกแจงจะสมมาตรถ้าพารามิเตอร์ b มีค่าเท่ากับศูนย์ พารามิเตอร์ δ คือ พารามิเตอร์ขนาด (scale parameter) และพารามิเตอร์ μ คือ พารามิเตอร์ตำแหน่ง (location parameter) ดังนั้นเมื่อ b มีค่าเท่ากับศูนย์ พารามิเตอร์ μ คือ ค่าเฉลี่ยของการแจกแจง (mean of the distribution)[4]

การแจกแจงแบบนอร์มอลอินเวอร์สเกาส์เซียน (Normal Inverse Gaussian (NIG)) มีลักษณะพิเศษคือ การแจกแจงแบบ NIG มีค่าใกล้เคียงกับผลรวมชั่วคราว (temporal aggregation) นั่นคือ ถ้าอัตราผลตอบแทนแบบรายวัน (daily returns) มีการแจกแจงแบบ NIG อัตราผลตอบแทนรายสัปดาห์ (weekly return) ที่ถูกกำหนดโดยผลรวมของอัตราผลตอบแทนแบบรายวัน (summation of the daily returns) ภายในหนึ่งสัปดาห์ก็จะมีการแจกแจงแบบ NIG ด้วย

นอกจากนี้การแจกแจงแบบ NIG ด้วย

ในแบบจำลอง GARCH และ FIGARCH ที่ค่าความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบนอร์มอลอินเวอร์สเกาส์เซียน (Normal Inverse Gaussian (NIG)) ข้อมูลอนุกรมของผลตอบแทน (return) จากดัชนีหลักทรัพย์ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$r_t = \mu + \frac{b\sqrt{\gamma}}{a}\sigma_t + Z_t\sigma_t,\ for \quad t = 1,\dots,T \tag{2.23}$$

โดย Z_t มีค่าเฉลี่ยเท่าศูนย์และความแปรปรวนเท่ากับหนึ่ง

ความหนาแน่น (density) ของ Z_t ถูกกำหนดโดยการแจกแจงแบบ NIG ดังนั้น $Z_t \sim NIG(a, b, -\frac{b\sqrt{\gamma}}{a}, \frac{\gamma^{3/2}}{a})$, เมื่อ $\gamma = \sqrt{a^2 - b^2}$

[4] The first four central moments of the NIG distribution as parameterized here are given by $\mu_1 = \mu + \frac{\delta(b/a)}{\sqrt{1-(b/a)^2}}$,

$\mu_2 = \mu + \frac{\delta^2}{a(\sqrt{1-(b/a)^2})^{3/2}}$, $\mu_3 = 3\delta^3 + \frac{(b/a)}{a^2(\sqrt{1-(b/a)^2})^5}$, $\mu_4 = 3\frac{\delta^4}{a^3}\frac{4(b/a)^2+1}{(\sqrt{1-(b/a)^2})^7}$

ด้วยข้อกำหนด (specifying) ของการแจกแจงแบบ NIG บ่งว่าการแจกแจงแบบมีเงื่อนไข ของผลตอบแทนจากดัชนีหลักทรัพย์จะมีคุณสมบัติในการแจกแจงแบบ NIG เช่นกัน ดังสมการ

$$r_t \mid \Omega_{t-1} \sim NIG\left(a, b, \mu, \frac{\gamma^{\frac{3}{2}}}{a}\sigma_t\right)$$

โดย Ω_{t-1} คือ เซตของข้อมูลข่าวสาร (information set) จากผลตอบแทนจากดัชนีหลักทรัพย์ในวันก่อนหน้า ซึ่ง $\Omega_{t-1} = \sigma(r_t, r_{t-1}, r_{t-2})$และมีค่าเฉลี่ยอย่างมีเงื่อนไข (conditional mean) และ ความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) ของผลตอบแทน ดังนี้

$$E[r_t \mid \Omega_{t-1}] = \mu + \sigma_t \frac{b\sqrt{\gamma}}{a}, \; for \quad t = 1, \ldots, T$$
$$Var(r_t \mid \Omega_{t-1}) = \sigma_t^2, \; for \quad t = 1, \ldots, T$$

ให้ $\mu_t = r_t - E(r_t \mid \Omega_{t-1}) = r_t - \sigma_t \dfrac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{a} - \mu$ เป็นนวัตกรรมของกระบวนการของผลตอบแทน (Innovation of the return process) (Jensen, M. B. and Lunde A.)

2.1.4 การแจกแจงค่าความคลาดเคลื่อนแบบปกติ (Error distribution of normal)

การแจกแจงแบบปกติเป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่องที่สำคัญที่สุดแบบหนึ่ง ซึ่งในบางครั้งอาจเรียกอาจเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่า การแจกแจงแบบเกาส์ ฟังก์ชันความหนาแน่น (density function) ของการแจกแจงแบบปกติ คือ

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty \le x \le \infty \tag{2.24}$$

เมื่อ μ และ σ คือค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตามลำดับ

นอกจากนี้ฟังก์ชันการแจกแจง (distribution function) สามารถกำหนดได้โดย

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-(v-\mu)^2/2\sigma^2 dv} \tag{2.25}$$

ในกรณีนี้เราสามารถกล่าวได้ว่าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวนคือ σ^2

ถ้ากำหนดให้ Z เป็นตัวแปรมาตรฐานที่สอดคล้องกับ X นั่นคือ ถ้าเราให้

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \tag{2.26}$$

แล้วค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดคะเนของ Z มีค่าเป็น 0 และความแปรปรวนมีค่าเป็น 1 ในกรณีดังกล่าวฟังก์ชันความหนาแน่นสำหรับ Z สามารถหาได้จากสมการที่ (2.25) โดยการแทนที่ค่า $\mu = 0$ และ $\sigma = 1$ จะได้

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Z^2/2} \tag{2.27}$$

ซึ่งสมการที่ (2.27) นี้ จะถูกเรียกว่า ฟังก์ชันความหนาแน่น (density function) ของการแจกแจงปกติมาตรฐานหรือการแจกแจงปกติมาตรฐาน (จินตนา เสริมพงษ์พันธ์, 2549)

ในแบบจำลอง GARCH และ FIGARCH ที่ค่าความคลาดเคลื่อนที่มีการแจกแจงนอร์มอลอินเวอร์สเกาส์เซียน (Normal Inverse Gaussian (NIG)) ข้อมูลอนุกรมของผลตอบแทน (return) จากดัชนีหลักทรัพย์ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$r_t = \mu + \theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \; for \quad t = 1,...,T \tag{2.28}$$

เมื่อ r_t คือ ผลตอบแทน (return) ของดัชนีราคาหลักทรัพย์

ε_t คือ ความคลาดเคลื่อน (error term) ที่มีการแจกแจงแบบปกติ (Kilic, 2006)

2.1.5 การแจกแจงค่าความคลาดเคลื่อนแบบ Student's t (Error distribution of Student's t)

ฟังก์ชันความหนาแน่น (density function) ของการแจกแจงแบบ Student's t คือ

$$f(t,\nu)=\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})}(1+\frac{t^2}{\nu})^{-(\nu+1)/2} \qquad -\infty<t<\infty \tag{2.29}$$

การแจกแจงแบบ Student's t หรือเรียกสั้นๆ ว่า การแจกแจง t โดยที่ ν คือ องศาความอิสระ ในกรณีที่ ν มีขนาดใหญ่ ($\nu \geq 30$) กราฟของ $f(t)$ จะมีลักษณะเข้าใกล้โค้งของการแจกแจงปกติมาตรฐาน สำหรับค่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ของการแจกแจง t ที่องศาอิสระ ν นิยมแสดงออกมาเป็น $t_{p,\nu}$ หรือ t_p (จินตนา เสริมพงษ์พันธ์, 2549)

ในแบบจำลองGARCH และFIGARCH ที่ความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบ Student's t ข้อมูลอนุกรมของผลตอบแทน (return) จากดัชนีหลักทรัพย์ สามารถเขียนสมการได้เช่นเดียวกับแบบจำลอง GARCH และ FIGARCH ที่ความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปกติ ดังนี้

$$r_t=\mu+\theta\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t, \; for \quad t=1,...,T \tag{2.30}$$

เมื่อ r_t คือ ผลตอบแทน (return) ของดัชนีราคาหลักทรัพย์

ε_t คือ ความคลาดเคลื่อน (error term) ที่มีการแจกแจงแบบปกติ (Kilic, 2006)

2.1.6 แบบจำลอง Skewness และ Kurtosis

กำหนดให้ l th moment ของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง(continuous random variable) X สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$m_l^{'}=E(X^l)=\int_{-\infty}^{\infty}x^l f(x)dx \tag{2.31}$$

เมื่อ E คือ ฟังก์ชันคาดหวัง (expectation function) ของ X

$f(x)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น (probability density function) ของ X

l th central moment ของ X สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$m_l = E\left[(X - \mu_x)^l\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^l f(x)dx \qquad (2.32)$$

skewness ก็คือ the third central moment ซึ่งใช้วัดความสมมาตร(symmetry) ของการแจกแจงของ X

kurtosis ก็คือ the fourth central moment ซึ่งใช้วัดความหนาของหาง(tail thickness)ของการแจกแจงของ X

skewness และ kurtosis ของ X สามารถกำหนดได้ตามลำดับดังนี้

$$S(x) = E\left[\frac{(X - \mu_x)^3}{\sigma_x^3}\right] \;, K(x) = E\left[\frac{(X - \mu_x)^4}{\sigma_x^4}\right] \qquad (2.33)$$

$K(x) - 3$ เรียกว่า excess kurtosis เพราะ $K(x) = 3$ สำหรับการแจกแจงปกติ ดังนั้น excess kurtosis ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติ จึงเท่ากับศูนย์

skewness และ kurtosis สามารถประมาณค่าได้จากตัวอย่าง (sample) กำหนดให้ $\{x_1, \ldots, x_T\}$ เป็นตัวอย่างสุ่มของ X ด้วยจำนวนตัวอย่างขนาด T

the sample mean คือ $$\hat{\mu}_x = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t \qquad (2.34)$$

the sample variance คือ $$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{\mu}_x)^2 \qquad (2.35)$$

the sample skewness คือ $$\hat{S}(x) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^3}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{\mu}_x)^3 \qquad (2.36)$$

the sample kurtosis คือ $$\hat{K}(x) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^4}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{\mu}_x)^4 \qquad (2.37)$$

ภายใต้ normality assumption, $\hat{S}(x)$ และ $\hat{K}(x) - 3$ เป็น distributed asymptically (Tsay, 2005: 9)

2.1.7 Quasi Maximum Likelihood Method

การประมาณสมการถดถอยเชิงเส้นตรงและแบบไม่เป็นเส้นตรง (linear and nonlinear regression) โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least squares method) มักนิยมใช้ในการประมาณฟังก์ชันค่าเฉลี่ยอย่างมีเงื่อนไข (condition mean function) ของตัวแปรตาม แต่วิธีการนี้ไม่เหมาะสมสำหรับการศึกษาที่มีวัตถุประสงค์แบบ empirical studies ในหลายๆกรณี ประการแรก วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least squares method) ไม่เหมาะสมสำหรับการวิเคราะห์ตัวแปรตาม (dependent variable) ที่มีลักษณะเฉพาะ อย่างเช่น binary variable และ truncated (censored) variable เพราะว่าไม่สามารถที่จะนำลักษณะของข้อมูลไปคำนวณได้ ประการที่สอง มีข้อจำกัดในการกำหนดลักษณะอื่นๆ ของ conditional moments อาทิเช่น ความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของตัวแปรตาม (conditional variance of the dependent variable) ซึ่งการอธิบายลักษณะความมีเงื่อนไขของตัวแปรตาม (conditional behavior of the dependent variable) เป็นสิ่งจำเป็นที่จะนำไปสู่การอธิบายที่เฉพาะเจาะจงสำหรับฟังก์ชันความหนาแน่น (density function) ที่มีโมเมนต์อย่างมีเงื่อนไข (conditional moments) และลักษณะการแจกแจงแบบต่างๆ ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงเป็นสิ่งผลักดันให้มีการคิดค้นวิธี Quasi Maximum Likelihood (QML) ขึ้น

วิธี Quasi Maximum Likelihood (QML) มีพื้นฐาน เช่นเดียวกับวิธี Maximum Likelihood (ML) ที่มักพบในตำราสถิติและเศรษฐมิติ ซึ่งวิธี Quasi Maximum Likelihood (QML) เป็นวิธีที่สามารถระบุลักษณะของฟังก์ชันความหนาแน่น (density function) ได้ (Kuan, 2004: 229)

แนวคิดนี้ขึ้นอยู่กับการกำหนดของโมเมนต์สองอันดับแรกของข้อมูล โดยกำหนดให้

$$E[Y \mid \beta] = \mu(\beta) \tag{2.38}$$

$$\operatorname{cov}(Y \mid \beta) = \alpha V\{\mu(\beta)\} \tag{2.39}$$

เมื่อ $\mu(\beta) = [\mu_1(\beta), \ldots, \mu_n(\beta)]^T$ เป็นตัวแทนของฟังก์ชั่นถดถอย (regression function)

V เป็น diagonal matrix สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\operatorname{var}(Y_i \mid \beta) = \alpha V\{\mu_i(\beta)\} \qquad , \alpha > 0 \tag{2.40}$$

พิจารณา sum of squares

$$(Y-\mu)^T V^{-1}(Y-\mu)/\alpha \tag{2.41}$$

เมื่อ $\mu=\mu(\beta)$ และ $V=V(\beta)$ ในการ minimize some of square มี 2 แนวทางดังนี้

แนวทางแรก คือ differentiate ซึ่งจะได้สมการ

$$-2D^T V^{-1}(Y-\mu)/\alpha+(Y-\mu)^T\frac{\partial V^{-1}}{\partial\beta}(Y-\mu)/\alpha \tag{2.42}$$

เมื่อ D คือ เมตริกซ์ $n\times p$

แต่วิธีนี้จะทำให้ได้ค่าเฉลี่ยที่ไม่เท่ากับ ศูนย์ และตัวประมาณค่า β ที่ไม่คงเส้นคงวา (inconsistent)

แนวทางที่ 2 คือ กำหนดให้ V ไม่เป็นฟังก์ชันของ β ดังนั้น $\hat{\beta}$ เป็น root ของ

$$D(\hat{\beta})^T V(\hat{\beta})^{-1}\{Y-\mu(\hat{\beta})\}/\alpha=0 \tag{2.43}$$

สามารถให้อยู่ในรูปสมการอย่างย่อได้ดังนี้

$$U(\beta)=D^T V^{-1}\{Y-\mu\}/\alpha \tag{2.44}$$

สมการดังกล่าวมีคุณสมบัติ ดังต่อไปนี้

1. $E[U(\beta)]=0$
2. $\operatorname{cov}\{U(\beta)\}=D^T V^{-1}D/\alpha$
3. $-E\left[\frac{\partial U}{\partial\beta}\right]=\operatorname{cov}\{U(\beta)\}=D^T V^{-1}D/\alpha$

Integration ของ quasi คือ

$$l(\mu,\alpha) = \int_{y}^{\mu} \frac{y-t}{\alpha V(t)} dt \tag{2.45}$$

คำว่า “quasi” แสดงถึงความจริงที่ว่า the score อาจจะตอบสนองหรือไม่ตอบสนองต่อฟังก์ชันความน่าจะเป็น (probability function) ยกตัวอย่างเช่น ฟังชันความแปรปรวน (variance function) $\mu^2(1-\mu)^2$ ไม่ตอบสนองต่อการแจกแจงฟังก์ชันความน่าจะเป็น (probability function)

จากข้อสมมติที่กำหนดว่า

$$\begin{aligned} E[Y_i \mid \beta] &= \mu_i(\beta) \\ \mathrm{var}(Y_i \mid \beta) &= V_i(\alpha,\beta) \end{aligned} \tag{2.46}$$

เมื่อ α คือ เวกเตอร์ $k \times 1$

ใน quasi-likelihood method เราจะแยกแบบจำลองค่าเฉลี่ย (mean model) และแบบจำลองความแปรปรวน (variance model) ออกจากกัน จะได้ว่า $\mathrm{var}(Y_i \mid \beta) = \alpha V_i(\mu_i)$ เหตุผลที่ต้องทำเช่นนี้ก็เพื่อที่จะได้ตัวประมาณค่าที่คงเส้นคงวา (consistent) ถ้ารูปแบบของความแปรปรวน(form of the variance) ผิดพลาด

ให้ $\hat{\alpha}_n$ เป็นพารามิเตอร์ที่คงเส้นคงวา (consistent estimator) ของ α และ $\hat{\beta}_n$ เป็นพารามิเตอร์ที่คงเส้นคงวา (consistent estimator) ของ β จะได้ว่า

$$G(\hat{\beta}_n,\hat{\alpha}_n) = D(\hat{\beta}_n)^T V^{-1}(\hat{\alpha}_n,\hat{\beta}_n)\{Y-\mu(\hat{\beta}_n)\} \tag{2.47}$$

มี asymptotic distribution

$$(\hat{D}^T \hat{V}^{1/2} \hat{D})^{-1}(\hat{\beta}_n - \beta) \longrightarrow \mathrm{d}\ N_p(0, I_p) \tag{2.48}$$

เมื่อ $\hat{D} = D(\hat{\beta}_n)$ และ $\hat{V} = V(\hat{\alpha}_n,\hat{\beta}_n)$ (Wakefield, 2008)

Maximum Likelihood Method

วิธี Maximum Likelihood (ML) ถูกใช้ในการประมาณพารามิเตอร์ในแบบจำลองประเภท GARCH สำหรับแบบพารามิเตอร์ภายใต้แบบจำลอง GARCH ที่ความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปกติ และ student's t ซึ่งสามารถประมาณได้จาก Software ทางสถิติ เราจะพิจารณาเฉพาะการประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง FIGARCH ดังนี้

สำหรับ log-likelihood function ของแบบจำลอง FIGARCH ที่ความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบ NIG เขียนสมการได้ดังนี้

$$\log L(\zeta,\mu_t) = T[2\ln(a) - \ln(\pi) - \frac{3}{2}\ln(\sqrt{a^2-b^2} + \sqrt{a^2-b^2})] - \sum_{t=1}^{T}\ln(q_t) + \sum_{t=1}^{T}\ln(K_1(aq_t))$$
$$- \sum_{t=1}^{T}[\frac{1}{2}\ln(\sigma_t^2) + b\frac{\mu_t}{\sigma_t(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a})}] \tag{2.49}$$

เมื่อ T คือ ขนาดตัวอย่าง, ζ คือ relevant parameter vector ยกตัวอย่างเช่น ในแบบจำลอง FIGARCH (1, *d*, 1) with a moving average term added to the conditional process $\zeta' = (\mu,\theta,\omega,d,\beta,\phi,a,b))$, $q_t = \sqrt{1+\frac{\mu_t^2}{\sigma_t^2\frac{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}}}$, K_1 คือ modified Bessel function of the third order and index one

สำหรับ log-likelihood function ของแบบจำลอง FIGARCH ที่ความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปกติ เขียนสมการได้ดังนี้

$$l_n = -\frac{1}{2}T\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\ln\sigma_t^2 + \frac{u_t^2}{\sigma_t^2}\right] \tag{2.50}$$

เช่นเดียวกัน log-likelihood function ของแบบจำลอง FIGARCH ที่ความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบ Student's t เขียนสมการได้ดังนี้

$$l_t = T\ln\frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{(\nu-2)\pi}\Gamma(\nu/2)} - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\ln\sigma_t^2 + (\nu+1)\ln(1+\frac{\hat{u}_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2})\right] \quad (2.51)$$

จากสมการที่ (2.50) และ (2.51)

$$\sigma_t^2 = \omega(1-\beta(B))^{-1} + (1-\beta(B))^{-1}(1-\phi(B)(1-B)^d)u_t^2$$

โดยที่

$$\begin{aligned}(1-B)^d &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)}B^k \\ &= 1 - dB + \frac{(1-d)(-d)}{2}B^2 + \frac{(2-d)(1-d)(-d)}{3!}B^3 + \ldots\end{aligned}$$

เมื่อ $\Gamma(k-d)/\Gamma(k+1) \approx k^{-d-1}$ (Kilic, 2006)

2.1.8 การตรวจสอบรูปแบบ (Diagnostic Checking)

การสร้างสมการพร้อมทั้งประมาณค่าพารามิเตอร์นั้น จะต้องทำการตรวจสอบรูปแบบว่า สมการพยากรณ์ที่ได้มามีความเหมาะสมหรือไม่ และรูปแบบใดของสมการดีที่สุด โดยใช้การทดสอบต่างๆ ดังนี้

1) การทดสอบ Box-Pierce Q-Statistics

เป็นการทดสอบว่าสหสัมพันธ์ในตัวเองในส่วนที่เหลือทุกช่วงเวลาที่ห่างกัน k มีความเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

โดยมีสมมติฐานหลัก $H_0 : \rho_1(\hat{a}_t) = \rho_2(\hat{a}_t) = \ldots = \rho_k(\hat{a}_t) = 0$

และสมมติฐานรอง $H_0 : \rho_1(\hat{a}_t) \neq \rho_2(\hat{a}_t) \neq \ldots \neq \rho_k(\hat{a}_t) \neq 0$

สามารถคำนวณได้ตามสมการนี้

$$\text{Q-stat} = \text{T (T+2)} \sum(\rho_j^2 / T - j) \qquad (2.52)$$

เมื่อ ρ_j^2 คือ สหสัมพันธ์ในตัวลำดับที่ j โดยที่ j = 1,…,k และ

T คือ จำนวนของค่าสังเกต (observation)

จะยอมรับสมมติฐานหลักเมื่อ Q-stat $\leq X^2_{a,k-m}$ ซึ่งหมายความว่าส่วนที่เหลือเป็นอิสระต่อกันที่ความล่า k และจะปฏิเสธสมมติฐานหลักเมื่อ Q-stat $> X^2_{a,k-m}$ ซึ่งหมายความว่าเกิดสหสัมพันธ์ในตัวเอง อย่างน้อยหนึ่งค่าในส่วนที่ไม่เท่ากับศูนย์

2) เกณฑ์การเลือกของรูปแบบของแบบจำลองที่ดีที่สุด (Information Criteria)

ในการหารูปแบบของแบบจำลอง เมื่อได้รูปแบบของแบบจำลองที่เหมาะสมหลายรูปแบบจึงต้องมีแนวทางในการเลือกรูปแบบของแบบจำลองที่ดีที่สุด โดยการพิจารณาค่า Akaike Information Criterion (AIC) และ Schwartz Criterion (SC) รูปแบบที่ให้ค่า AIC และ SC น้อยที่สุดจะเป็นรูปแบบที่ดีที่สุด

Akaike Information Criterion (AIC) $= -2l \mid \eta + 2k \mid \eta$

Schwartz Criterion (SC) $= -2l \mid \eta + k \ \log \eta \mid \eta$

โดยที่ k เป็นจำนวนของพารามิเตอร์ที่ทำการประมาณค่า

η เป็นจำนวนของค่าสังเกต

l เป็นค่าของ Log Likelihood Function ที่ใช้พารามิเตอร์ที่ถูกประเมินค่า k ตัว

AIC คือค่าสถิติประยุกต์ที่คล้ายกับ Adjusted R^2 แต่สามารถใช้รูปแบบการใส่ค่าลอกกาลิทึมฐานธรรมดา (natural logarithm) หากค่า AIC นี้ยิ่งมีค่าน้อยเพียงใด ย่อมแสดงว่าสามารถอธิบายได้ว่าแบบจำลองที่ประมาณได้นั้นสามารถเป็นตัวแทนข้อมูลจริงได้ดีเพียงนั้น และค่า AIC นี้ยังเป็นค่าสถิติที่เหมาะสมที่จะนำไปใช้ในการหาค่าย้อนหลัง (lag length) ที่เหมาะสมได้อีกด้วย (Gujarati, 2003)

2.1.9 เทคนิค QQ-plot

โดยทั่วไปเรามักสมมติว่าความคลาดเคลื่อน (error term) มีการแจกแจงแบบปกติ ถ้าความจริงแล้วฟังก์ชันการแจกแจงความหนาแน่นความน่าจะเป็น (probability density function: pdf) ของความคลาดเคลื่อน (error term) ไม่ใช่การแจกแจงแบบปกติ ก็จะทำให้ผลงานมีความน่าเชื่อถือลดลง เพื่อขจัดปัญหาการจำลองการแจกแจงของความคลาดเคลื่อน (error term) ที่ผิดพลาดจึงได้มีการนำเทคนิค QQ-plot มาใช้

พิจารณาตัวอย่าง $\{x_i\}, i = 1,\ldots, I$ ของตัวแปรสุ่ม (random variable) X โดยมี pdf คือ $p(x)$ จากการจัดลำดับตัวอย่าง $\{x_i\}$เราได้ nondecreasing sequence $\{y_i\}, i = 1,\ldots, I$ เมื่อ $y_i \le y_j$ สำหรับทุกๆ $(i, j): i \le j$

$$P(i \mid y) = \binom{I-1}{i-1} P^{i-1}(y)\left[1 - P(y)\right]^{I-i} \tag{2.53}$$

เมื่อ $P(.)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจง (distribution function) ที่แสดงถึง given pdf $p(.)$ โดยที่ความคาดหวังอย่างมีเงื่อนไข (conditional expectation, $m_{i|y}$) และความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance, $\sigma_{i|y}^2$) ของตัวแปรสุ่ม i given y ดังสมการ

$$\begin{aligned} m_{i|y} &= E\{i \mid y\} = 1 + (I-1)P(y) \\ \sigma_{i|y}^2 &= E\{i^2 \mid y\} - E^2\{i \mid y\} = (I-1)P(y)\left[1 - P(y)\right] \end{aligned} \tag{2.54}$$

เมื่อ $\sigma_{i|y}^2$ มีค่าน้อย $i \approx m_{i|y}$

จากสมการ (3.54) ความสัมพันธ์ระหว่าง i และ $P(y)$ เป็นการประมาณเชิงเส้นตรง (approximately linear) การ plot ของ y_i กับ $P^{-1}(\rho_i)$ เมื่อ $P^{-1}(.)$ เป็นอินเวอร์สของ $P(.)$ และ $\rho_i = (i-1)/(I-1)$ คือ QQ-plot (Fang, 2007)

2.2 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เมื่อไม่นานมานี้ การประมาณค่าจากแบบจำลอง FIGARCH นับเป็นแบบจำลองที่ได้รับความสนใจอย่างแพร่หลายจากผู้เกี่ยวข้อง โดยเฉพาะนักวิชาการซึ่งเห็นได้จากผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์ลงในวารสารทางเศรษฐศาสตร์อย่างต่อเนื่อง ทั้งนี้เนื่องจากการประมาณค่าจากแบบจำลอง FIGARCH สามารถระบุลักษณะของความจำระยะยาว (long memory) ในความผันผวนของผลตอบแทนของสินทรัพย์ (asset return) ซึ่งมีความสำคัญในการวิเคราะห์ในทางการเงิน (financial) สำหรับในประเทศไทยการศึกษาดังกล่าวค่อนข้างน้อย งานวิจัยที่เกี่ยวข้องสรุปได้ดังนี้

Lux and Kaizoji (2004) ได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพ (potential) การพยากรณ์ของแบบจำลองอนุกรมเวลา (time series models) ระหว่างแบบจำลองความจำระยะยาว (FIGARCH, AFIMA, multi-fractal model) และแบบจำลองความจำระยะสั้น (GARCH for volatility, ARIMA for volume) โดยได้พยากรณ์ความผันผวน (volatility) และปริมาณ (volume) ของตัวอย่างหลักทรัพย์ที่มีปริมาณการซื้อขายสูงในตลาดหลักทรัพย์ญี่ปุ่น (Japanese Stocks) จำนวน 100 บริษัทที่ได้จากการสุ่ม โดยที่การพยากรณ์เป็นการพยากรณ์ไปข้างหน้ามากกว่า 100 วัน จากข้อมูลของตัวอย่างที่เป็นแบบรายวัน ตั้งแต่ปี 1975 ถึงปี 2001 ได้ผลลัพธ์ที่น่าสนใจหลายประการ ประการแรกเมื่อพิจารณาจากความผันผวน (volatility) การพยากรณ์จากแบบจำลองความจำระยะยาว (long memory models) ให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าการพยากรณ์จากแบบจำลอง GARCH ประการที่สองเมื่อพิจารณาในด้านปริมาณ (volume) พบว่ามีระดับการพยากรณ์ที่สูงกว่า (higher degree of forecastability) ภายใต้หลักเกณฑ์ตัดสิน (criterion) ทั้งแบบ MSE (mean squared error) และแบบ MAE (mean absolute error) ประการที่สาม ดีกรีที่แตกแต่งของความผันแปร (variability) ของการดำเนินการ (performance) ของวิธีที่แตกต่างกันทำให้การประมาณค่าของการพยากรณ์ด้อยคุณภาพ (the forecasting quality of pooled estimates)

Kilic (2006) ได้ศึกษาแบบจำลอง FIGARCH-NIG เพื่อทำการศึกษาความจำระยะยาว (hyperbolic (long) memory), ความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (time varying dynamics in conditional volatility), ความไม่สมมาตร (asymmetry) และลักษณะของการแจกแจงกา (fat tailed distribution) ของผลตอบแทนระหว่างอัตราแลกเปลี่ยนของเงินสกุลดอลลาร์ของสหรัฐอเมริกากับเงินสกุลอื่นของประเทศต่างๆ ได้แก่ เงินดอลลาร์ของแคนาดา เงินมาร์กเยอรมัน เงินยูโรของยุโรป เงินเยนของญี่ปุ่น เงินฟรังค์ของสวิตซ์ เงินปอนด์ของอังกฤษ และเปรียบเทียบการประมาณค่าจากแบบจำลอง GARCH และ FIGARCH โดยที่ค่าความคลาดเคลื่อน (error term)

มีการแจกแจงแบบปกติ, Student's t และ Normal Inverse Gaussian (NIG) เพื่อหาแบบจำลองที่ดีที่สุด โดยใช้ข้อมูลรายวันตั้งแต่วันที่ 4 เดือนมกราคม 1999 ถึง วันที่ 26 เดือนธันวาคม 2006 สำหรับอัตราแลกเปลี่ยนเงินสกุลดอลลาร์ของสหรัฐอเมริกากับเงินยูโรของยุโรป รวม 2007 ตัวอย่าง ,ตั้งแต่วันที่ 2 เดือนมกราคม 1979 ถึง วันที่ 11 กุมภาพันธุ์ 2002 สำหรับอัตราแลกเปลี่ยนเงินสกุลดอลลาร์ของสหรัฐอเมริกากับเงินมาร์กเยอรมัน รวม 5870 ตัวอย่าง สำหรับอัตราแลกเปลี่ยนเงินสกุลดอลลาร์ของสหรัฐอเมริกากับเงินสกุลอื่นๆ ใช้ข้อมูลตั้งแต่วันที่2 เดือนมกราคม 1979 ถึง วันที่ 26 เดือนธันวาคม 2006 รวม 7029 ตัวอย่าง ผลการศึกษาพบว่า FIGARCH–NIG สามารถระบุลักษณะความจำระยะยาวในความผันผวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional volatility) และพบการกระจายที่ไม่สมมาตรของผลตอบแทนรายวันในอัตราแลกเปลี่ยน ยกเว้นผลตอบแทนรายวันในอัตราแลกเปลี่ยนเงินสกุลยูโรที่มีการกระจายที่สมมาตร

Sang and Seong (2006) ได้ทำการตรวจสอบลักษณะที่ไม่สมมาตรของความจำระยะยาว (long memory) ที่มีอยู่ในความผันผวน (volatility) ของ Asian stock markets (ญี่ปุ่น, เกาหลีใต้, ฮ่องกง, สิงคโปร์) โดยใช้แบบจำลอง FIEGARCH จากการศึกษาได้ข้อสรุปที่สำคัญหลายประการดังนี้ ประการแรกคือ พบคุณสมบัติของความจำระยะยาว (long memory) ในระดับของอัตราผลตอบแทนจากการใช้แบบจำลอง ARFIMA แต่เนื่องจากยังคงเหลือ ARCH effect ของการประมาณส่วนที่เหลือ (residual) จึงทำให้แบบจำลอง ARFIMA เป็นแบบจำลองที่ไม่เหมาะสมในการอธิบายคุณสมบัติของความจำระยะยาว (long memory) ประการที่สองจากการตรวจสอบ ความผันผวนที่เคลื่อนที่ (volatility dynamics) ของผลตอบแทนในตลาดหลักทรัพย์ (stock return) พบว่าแบบจำลอง FIGARCH ดีกว่าแบบจำลอง GARCH และ IGARCH ในการสรุปคุณสมบัติความจำระยะยาวในความผันผวน ประการที่สาม จากการพิจารณาการตอบสนองที่ไม่สมมาตรของความผันผวน (volatility) ต่อข่าวสารโดยการใช้แบบจำลองความผันผวนที่ไม่สมมาตร (asymmetric volatility models) ปรากฏว่าความผันผวน (volatility) แสดงถึงลักษณะที่ไม่สมมาตรอย่างมีนัยสำคัญ สาเหตุเนื่องจาก leverage effect, volatility feedback effect และความไม่เท่าเทียมของข่าวสารที่ผู้ลงทุนได้รับ (asymmetry information among investors) ประการสุดท้าย จากการตรวจสอบความจำระยะยาวในและความไม่สมมาตรของความผันผวน โดยการใช้แบบจำลอง FIEGARCH พบว่าความผันผวน (volatility) ของทุกตัวอย่างรวมอยู่ในคุณสมบัติของความจำระยะยาวเช่นเดียวกับความไม่สมมาตรของความผันผวน ซึ่งจากผลลัพธ์ทั้งหมดชี้ให้เห็นว่ามีลักษณะความจำระยะยาว และความไม่สมมาตรของความผันผวน ในตลาดหลักทรัพย์ (Asian stock market)

Cheong , Abu Hassan and Isa (2006) ได้ตรวจสอบลักษณะความไม่สมมาตร และความจำระยะยาวในความผันผวน (asymmetry and long memory volatility) ในตลาดหลักทรัพย์มาเลเซีย จากแบบจำลอง GARCH (1,1), CGARCH (1,1) และ FIGARCH (1, *d*, 1) โดยใช้ข้อมูลแบบรายวันตั้งแต่ปี 1991-2005 พบว่าแบบจำลอง long-memory GARCH (CGARCH (1,1) และ FIGARCH (1, *d*, 1)) สามารถอธิบายลักษณะความจำระยะยาว (long memory) ในตลาดหลักทรัพย์มาเลเซียได้ดีกว่าแบบจำลอง GARCH และจากผลของ long memory volatility ทำให้สามารถจัดลำดับ (rank) ระดับ (degree) ความไม่มีประสิทธิภาพ (inefficiency) ของตลาดในแต่ละช่วงเวลา (across the periods) ได้ นอกจากนี้จากการใช้ช่วงเวลาของข้อมูลค่อนข้างยาวนาน ทำให้สามารถตรวจสอบ piecewise ในช่วงก่อนวิกฤตเศรษฐกิจ (1-1-1991 ถึง 31-12-1996) ช่วงระหว่างวิกฤตเศรษฐกิจ (1-1-1997 to 31-8-1998) และหลังวิกฤตเศรษฐกิจในตลาดหลักทรัพย์ของมาเลเซียได้ สุดท้ายเมื่อพิจารณาจากค่า log likelihood พบว่าแบบจำลอง GARCH-RV, CGARCH-RV และ FIGARCH-RV มีความเหมาะสมกว่าแบบจำลอง GARCH แต่เมื่อพิจารณาจากค่า BIC กลับให้ผลตรงกันข้าม

Banerjee and Sarkar (2006) ได้ตรวจสอบคุณสมบัติของความจำระยะยาว (long memory) ในตลาดหลักทรัพย์อินเดีย (Indian stock market) ซึ่งเป็นตลาดเกิดใหม่ โดยใช้ข้อมูลจากดัชนีหลักทรัพย์ที่ได้รับความนิยมในอินเดีย (SENSEX) ในตลาดหลักทรัพย์ Mumbai (BSE) โดยใช้ข้อมูลรายวันตั้งแต่วันที่ 3 เดือนเมษายน 1979 ถึง วันที่ 27 เดือนเมษายน 2005 พบว่า มีความจำระยะยาว ในความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (long memory conditional variance) และพบว่าแบบจำลอง FIGARCH เป็นแบบจำลองที่เหมาะสมที่สุดและเหนือกว่า (outperforms) แบบจำลอง GARCH แบบอื่นๆ นอกจากนี้ยังพบว่า leverage effect ไม่มีนัยสำคัญใน SENSEX return แสดงให้เห็นว่าในทางปฏิบัติแล้ว ตลาดเกิดใหม่อาจมีลักษณะที่แตกต่างไปจากตลาดที่พัฒนาแล้ว

Ferretti and Gilbert (2007) ได้ตรวจลักษณะความจำระยะยาว (long memory) ของผลตอบแทนของอลูมิเนียมและทองแดง ซึ่งโลหะทั้ง 2 ชนิดเป็น โลหะสำคัญที่มีการซื้อ- ขาย แลกเปลี่ยนกันใน London Metal Exchange (LME) โดยใช้ข้อมูลราคาซื้อ- ขาย แลกเปลี่ยนแบบรายวันและแบบ 3 เดือน ใน London Metal Exchange (LME) ตั้งแต่วันที่ 3 เดือนตุลาคม 1982 ถึง วันที่ 30 เดือนธันวาคม 2005 จากแบบจำลอง FIGARCH พบว่า spot และความผันผวนของราคาของอลูมิเนียมและทองแดง ในช่วง 3 เดือน และแบบรายวันมีลักษณะเป็น long memory และ

กระบวนการ scedastic ของอลูมิเนียมและทองแดงใน LME มีระยะเวลาของการยึดติด (persistence) ของ shock ต่อความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขสูง

Baillie et al. (2007) ได้ตรวจสอบคุณสมบัติความจำระยะยาวของความผันผวน (long memory volatility) ของผลตอบแทนล่วงหน้าแบบรายวัน (daily futures returns) และผลตอบแทนล่วงหน้าแบบความถี่สูงภายในหนึ่งวัน (high frequency intra day futures returns) ของสินค้าที่สำคัญ 6 ชนิด ได้แก่ ข้าวโพด ถั่วเหลือง ปศุสัตว์ สุกร ก๊าซโซลิน (gasoline) และทองคำ โดยใช้ข้อมูลราคาปิดสินค้าล่วงหน้า (daily closing future prices) จาก major U.S. futures market จำนวน 18 ปี จากการพล๊อตกราฟอัตสหสัมพันธ์ของอัตราผลตอบแทน พบว่าผลตอบแทนกำลังสองและค่าสัมบูรณ์ของผลตอบแทน (squared returns and absolute return) ของราคาสินค้าล่วงหน้าแบบรายวัน(daily futures returns) ของข้าวโพดและถั่วเหลืองแสดงถึงลักษณะของของฤดูกาลในความผันผวน (seasonality in volatility) จึงได้กรองลักษณะของของฤดูกาล (seasonality) ออก โดยใช้ FFF filter ดังนั้นการวิเคราะห์ความผันผวนของอัตราผลตอบแทน (return volatility) ของข้าวโพดและถั่วเหลืองจึงใช้แบบจำลอง filter volatility ในการวิเคราะห์ นอกจากนี้ยังพบว่าผลตอบแทนกำลังสองและค่าสัมบูรณ์ของผลตอบแทน (absolute return and squared returns) มีนัยสำคัญต่อลักษณะของความจำระยะยาว (long memory) และพบว่าความผันผวนของผลตอบแทน ของทั้งสองสามารถอธิบายได้ดีโดยใช้แบบจำลอง FIGARCH