ชื่อเรื่อง การศึกษาสมการฟังก์ชัน $f(x + y) = f(x) + f(y)$

ชื่อผู้เขียน นายนิคม เหล่าเนตร์

การค้นคว้าแบบอิสระเชิงวิทยานิพนธ์ วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ 2527

บทคัดย่อ

จุดมุ่งหมายของการค้นคว้าแบบอิสระเชิงวิทยานิพนธ์นี้ เพื่อหารูปแบบของฟังก์ชันค่าจริง f, g และ h บน R ที่สอดคล้องสมการฟังก์ชัน $f(x + y) = g(x) + h(y)$, $f(x + y) = g(x) \cdot h(y)$, $f(xy) = g(x) \cdot h(y)$ หรือ $f(xy) = g(x) + h(y)$ และเพื่อศึกษาความเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน f, g และ h ของสมการฟังก์ชัน $f(x + y) = g(x) + h(y)$ เมื่อ f หรือ g หรือ h เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน นอกจากนี้ยังศึกษาเพื่อหาเงื่อนไขที่ทำให้กราฟของฟังก์ชัน ที่สอดคล้องกับสมการฟังก์ชัน $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ เดนซ์ใน $R \times R^+$

ผลที่ได้จากการวิจัยทำให้ทราบว่า

1) ฟังก์ชันค่าจริง f, g และ h บน R จะสอดคล้องสมการฟังก์ชัน $f(x + y) = g(x) + h(y)$ ก็ต่อเมื่อจะมีค่าคงที่ a, b และฟังก์ชันค่าจริง ϕ บน R ที่ $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$, $g(x) = \phi(x) + a$, $h(x) = \phi(x) + b$ และ $f(x) = \phi(x) + a + b$

2) ฟังก์ชันค่าจริง f, g และ h บน R ที่ $g(0) \neq 0$ และ $h(0) \neq 0$ จะสอดคล้องสมการฟังก์ชัน $f(x + y) = g(x) . h(y)$ ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชันค่าจริง ϕ บน R ที่ $\phi(x + y) = \phi(x) . \phi(y)$, $g(x) = g(0) . \phi(x)$, $h(x) = h(0) . \phi(x)$ และ $f(x) = g(0) . h(0) . \phi(x)$

3) ฟังก์ชันค่าจริง f, g และ h บน R ที่ $g(1) \neq 0$ และ $h(1) \neq 0$ จะสอดคล้องสมการฟังก์ชัน $f(xy) = g(x) . h(y)$ ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชันค่าจริง ϕ บน R ที่ $\phi(xy) = \phi(x) . \phi(y)$, $g(x) = g(1) . \phi(x)$, $h(x) = h(1) . \phi(x)$ และ $f(x) = g(1) . h(1) . \phi(x)$

4) ฟังก์ชันค่าจริง f, g และ h บน R จะสอดคล้องสมการฟังก์ชัน $f(xy) = g(x) + h(y)$ ก็ต่อเมื่อมีค่าคงที่ a , b และฟังก์ชันค่าจริง ϕ บน R ที่ $\phi(xy) = \phi(x) + \phi(y)$, $g(x) = \phi(x) + a$, $h(x) = \phi(x) + b$ และ $f(x) = \phi(x) + a + b$

5) ถ้า f, g และ h สอดคล้องสมการฟังก์ชัน $f(x + y) = g(x) + h(y)$ และ f หรือ g หรือ h เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน แล้ว f, g และ h จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R

6) ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ไม่โมโนโทน และสอดคล้องสมการฟังก์ชัน $f(x + y) = f(x) . f(y)$ แล้วกราฟของ f จะเดนซ์ใน $R \times R^+$

Research Title Study on the Functional Equation

$f(x + y) = f(x) + f(y)$

Name Mr. Nikom Lawnet

Research For Master of Science in Teaching Mathematics

Chiang Mai University 1984

Abstract

The purpose of this research is to characterize all real-valued functions f, g and h that satisfy the functional equations of the forms $f(x + y) = g(x) + h(y)$, $f(x + y) = g(x) \cdot h(y)$, $f(xy) = g(x) \cdot h(y)$ or $f(xy) = g(x) + h(y)$ and also to study the continuity of functions f, g and h that satisfy the equations $f(x + y) = g(x) + h(y)$ assuming only the measurability of the function f or g or h.

The other purpose is also to find a condition for which the graph of the function f satisfying equation $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ is dense in $R \times R^+$

The study shows that

1) functions f, g and h satisfy the equation $f(x + y) = g(x) + h(y)$ if and only if there exist constants a, b and a function

$\phi : R \longrightarrow R$ such that $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$,
$g(x) = \phi(x) + a$, $h(x) = \phi(x) + b$ and
$f(x) = \phi(x) + a + b$;

2) functions f, g and h that $g(0) \neq 0$ and $h(0) \neq 0$ satisfy the equation
$f(x + y) = g(x) \cdot h(y)$ if and only if there exists a function $\phi : R \longrightarrow R$ such that
$\phi(x + y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$, $g(x) = g(0) \cdot \phi(x)$,
$h(x) = h(0) \cdot \phi(x)$ and $f(x) = g(0) \cdot h(0) \cdot \phi(x)$;

3) functions f, g and h that $g(1) \neq 0$ and $h(1) \neq 0$ satisfy the equation $f(xy) = g(x) \cdot h(y)$ if and only if there exists a function $\phi : R \longrightarrow R$
such that $\phi(xy) = \phi(x) \cdot \phi(y)$,
$g(x) = g(1) \cdot \phi(x)$, $h(x) = h(1) \cdot \phi(x)$ and
$f(x) = g(1) \cdot h(1) \cdot \phi(x)$;

4) functions f, g and h satisfy the equation
$f(xy) = g(x) + h(y)$ if and only if there exist constants a, b and a function $\phi : R \longrightarrow R$
such that $\phi(xy) = \phi(x) + \phi(y)$, $g(x) = \phi(x) + a$,
$h(x) = \phi(x) + b$ and $f(x) = \phi(x) + a + b$;

5) if functions f, g and h safisfy the equation $f(x + y) = g(x) + h(y)$ and f or g or h is measurable, then f, g and h are continuous on R;

6) if a function f is not monotone and satisfies the equation $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, then the graph of f is dense in $R \times R^{+}$