บทที่ 3

ระเบียบวิธีการวิจัย

3.1 แบบจำลองที่ใช้ในการศึกษา

Percentage change of Indonesia Stock Exchange = f (GDP,FDI,U,Inf) + $\varepsilon 1$

Percentage change of Stock Exchange of Thailand Index = f (GDP,FDI,U,Inf) + $\varepsilon 2$

โดยที่ GDP = ผลิตภัณฑ์มวลรวมประชาชาติ

FDI = เงินลงทุนโดยตรงจากต่างประเทศ

U = อัตราการว่างงาน

Inf = อัตราเงินเฟ้อ

3.2 สมมติฐาน

ผลกระทบของ เงินลงทุนโดยตรงจากต่างประเทศ (FDI) ผลิตภัณฑ์มวลรวมประชาชาติ (GDP) อัตราเงินเฟ้อ (Inflation rate) อัตราการว่างงาน (Unemployment rate) มีความสัมพันธ์กับดัชนีตลาดหลักทรัพย์ของอินโดนีเซียและไทย

3.3 วิธีการศึกษา

3.3.1 การวัดความสัมพันธ์และคอปปูล่า

การวัดความสัมพันธ์สำหรับการจัดการความเสี่ยงทางการเงิน (Embrechts, Lindskog, and McNeil (2003)) สำหรับสองตัวแปรสุ่ม X และ Y การวัดทางเดียวของความสัมพันธ์ δ(X,Y) โดยทั่วไปตัวแปรสุ่มมีคุณสมบัติสอดคล้องกันสี่ข้อ

1. δ (X,Y) = δ (Y,X).
2. -1 $\leq \delta$ (X,Y) $\leq$ 1.
3. δ (X,Y) = 1 ถ้า X และ Y คือ co-monotonic; δ (X,Y) = -1 ถ้า X และ Y คือ counter-monotonic.

4. ถ้า T คือ exactly monotonic, เมื่อ $\delta(T(X),Y) = \{\ \delta(X,Y),\ T =$ เพิ่มขึ้น or $-\delta(X,Y),\ T =$ ลดลง

คุณสมบัติข้างต้นบ่งชี้ได้ว่าโดยปกติ ค่าสหสัมพันธ์เชิงเส้นของ Pearson สอดคล้องเฉพาะคุณสมบัติสองข้อแรก แต่คุณสมบัติที่แสดงว่าการวัดลำดับสหสัมพันธ์ของ Kendall's tau สอดคล้องกับคุณสมบัติทั้งหมด

การวัดค่าสหสัมพันธ์เชิงเส้นของ Pearson

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{VAR(X)VAR(Y)}}$$

กำหนดให้ความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่าง X และ Y ถ้า Y=a+bX, โดย = 1 แสดงว่า ตัวแปร X และ Y มีความสัมพันธ์กัน และถ้า X และ Y เป็นอิสระ จะกำหนดได้โดย = 0 ซึ่งการใช้นิยามดังกล่าวจะมีจุดอ่อนของสหสัมพันธ์เชิงเส้น (Embrechts, McNeil, and Straumann (2000)) กล่าวคือ ค่า มีเงื่อนไขว่าจะต้องมีทั้งความแปรปรวน X,Y และถ้าค่า = 0 ไม่ได้หมายความว่าตัวแปรจะเป็นอิสระซึ่งกันและกันยกเว้นในการแจกแจงของตัวแปรร่วมของ X,Y ซึ่งเป็นการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปรที่ = 0 หมายถึงไม่มีความสัมพันธ์ ค่าสัมประสิทธิ์ ไม่คงที่ภายใต้ nonlinear strictly increasing transformations การแจกแจงมาร์จินัลและสหสัมพันธ์ไม่แสดงการแจกแจงร่วม จะเป็นจริงเฉพาะสำหรับการแจกแจงปกติสองตัวแปร กำหนดให้การแจกแจงมาร์จินัล Fx และ Fy และอาจจะมีกรณีที่ > - 1 , < 1

3.3.2 Kendall's Tau and Speaman's Rho

สมมติตัวแปรสุ่ม X,Y แสดงถึงผลตอบแทนทางการเงินหรือค่าตอบแทนซึ่งในหลายกรณีที่ X,Y ไม่ว่าจะมีค่ามากหรือน้อยจะมีการเคลื่อนไหวไปด้วยกัน โดยที่ X มีมูลค่าสูงและในเวลาเดียวกัน Y มีมูลค่าน้อย แนวคิดของความพ้องกัน (Concordance) ที่ใช้วัดความสัมพันธ์ในลักษณะนี้จะต้องมีคุณสมบัติของความเป็นค่าคงที่ increasing transformations ของ X,Y การวัดความพ้องกันที่จะอธิบายในฟังก์ชันของคอปปูล่าระหว่าง Xและ Y นั้น เป็นสหสัมพันธ์เชิงเส้นไม่คงที่ที่ increasing transformations ของ X และ Y ซึ่งไม่ใช่การวัดแบบทั่วไป การวัดทั้งสองของความพ้องกันคือ Kendall's tau statistic

กำหนดให้ F คือฟังก์ชันการแจกแจงสองตัวแปรต่อเนื่อง และให้ (X1,Y1) และ (X2,Y2) เป็นสองส่วนที่ไม่สัมพันธ์ของตัวแปรสุ่มจากกการแจกแจงนี้ และกำหนดให้เป็นเวคเตอร์

ที่สอดคล้องกัน (X1,Y1) และ (X2,Y2) ถ้า X1 > X2 และ Y1 > Y2 และ X1 < X2 เมื่อ Y1 < Y2 บอกได้ว่ามีความพ้องกันและไม่เป็นจริงในกรณีกลับกัน

นิยามการแจกแจงของฟังก์ชัน Kendall's tau statistic ได้ดังนี้

= Pr {(X1 - X2) (Y1 - Y2) > 0} – Pr {(X1 - X2) (Y1 - Y2) <0}

ถ้า C คือคอปปูล่าที่ประกอบด้วย F สามารถแสดงได้ว่า

$$\tau = 4\iint_{12} CdC - 1 = 4\iint_{12} C(u,v)c(u,v)dudv - 1$$

โดยที่ c(u,v) คือความหนาแน่นของคอปปูล่า การประมาณของตัวแปรสำหรับตัวแปรสุ่มมีขนาด n คือ ตัวเลขของตัวสุ่มคู่มีความสัมพันธ์ลบด้วยคู่ที่ไม่มีความสัมพันธ์หารด้วยจำนวนของคู่ทั้งหมด $\binom{n}{2}$:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{(\frac{n}{2})} \sum_{1 \le i \le j \le n} sign((x_i - x_j)(y_i - y_j))$$

สำหรับคู่ของตัวแปรสุ่ม (X,Y) กับฟังก์ชั่นการแจกแจงร่วม F และการแจกแจงมาร์จินัล Fx , Fy ของ Spearman's rho statistic ( ) นิยามเป็นว่า สหสัมพันธ์ระหว่าง Fx (X), Fy (Y) ซึ่งการวัดของลำดับสหสัมพันธ์ในส่วนของ integral transforms ของ X,Y สำหรับคอปปูล่าที่ประกอบด้วย X,Y สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\rho_s = 12\iint_{12} C(u,v)dudv - 3$$

สำหรับการขนาดทดลอง $n\rho_s$ อาจประมาณได้โดยใช้

$$\hat{\rho}_s = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} (rank(X_i) - \frac{n+1}{2})(rank(y_i) - \frac{n+1}{2})$$

ถึงกระนั้นทั้ง ρ_s, τ คือการวัดของความพ้องกัน ค่าเหล่านั้นสามารถแตกต่างกันได้เล็กน้อย Nelson (1999) ได้สรุปความสัมพันธ์ระหว่าง ρ_s, τ ที่เป็นอสมการไว้ดังนี้

$$\frac{3\tau-1}{2} \le \rho_s \le \frac{1+2\tau-\tau^2}{2}; \tau > 0$$
$$\frac{\tau^2+2\tau-1}{2} \le \rho_s \le \frac{1+3\tau}{2}; \tau < 0$$

3.3.3 การทดสอบหาค่าความสัมพันธ์ และ การทดสอบการกระจาย

ความสัมพันธ์ของดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยและตลาดหลักทรัพย์อินโดนีเซีย จะใช้ข้อมูลของ ดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (SET Index) ดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์ประเทศอินโดนีเซีย (JCI) เงินลงทุนโดยตรงจากต่างประเทศ (FDI) ผลิตภัณฑ์มวลรวมประชาชาติ (GDP) อัตราเงินเฟ้อ (Inflation rate) อัตราการว่างงาน (Unemployment rate) ของไทยและอินโดนีเซีย

X_i = ดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์ของไทยและอินโดนีเซีย (SET),(JCI)

Y_i = ปัจจัยทางเศรษฐกิจมหภาคทั้ง 4 ตัว

คำนวณหาอัตราผลตอบแทนรายวันจากดัชนีตลาดทั้งสองตลาดรายสัปดาห์จาก

$$R_i = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_t}$$

ตรวจสอบค่าสถิติต่างๆ โดยนำข้อมูลดัชนีทั้งหมดจากข้อหนึ่ง มาประเมินการกระจายของข้อมูลอัตราผลตอบแทนรายวันของดัชนีแต่ละตลาดที่ศึกษา ประกอบด้วย ค่ากลาง ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธ์ความโด่งจากความสัมพันธ์

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} X_t$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{t=1}^{N}(X_\eta - \mu)}{n-1}$$

$$s = \frac{1}{\sigma^2}\frac{\sum_{t=1}^{N}(X_\eta - \mu)^\delta}{n-1}$$

$$K = \frac{1}{\sigma^4} \frac{\sum_{t=1}^{N} (X_\eta - \mu)^4}{n-1}$$

โดยที่ ค่ากลางจะชี้ถึงอัตราผลตอบแทนที่คาดจากผลตอบแทนของดัชนีของแต่ละตลาด และในทางสถิติ ค่าแต่ละตัวที่จะระบุลักษณะการกระจายตัวของผลตอบแทนดัชนีแต่ละตลาด จะต้องประกอบด้วยค่าต่างๆข้างต้น ทำการทดสอบการแจกแจงแบบปรกติ ด้วยวิธี Jarque-Bera โดยมีสมมุติฐานหลักคือ มีการกระจายแบบปรกติ แล้วนำมาคำนวณ ค่าสหสัมพันธ์เชิงเส้นของ Pearson

$$\rho = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{VAR(X)VAR(Y)}}$$

ของตัวแปรในกลุ่มต่างๆ เปรียบเทียบกับค่าความสัมพันธ์ของ Kendall

$$\hat{\rho}_s = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(rank(X_i) - \frac{n+1}{2} \right) \left(rank(y_i) - \frac{n+1}{2} \right)$$

3.3.4 การศึกษารูปแบบการกระจายโดยใช้แบบจำลอง Generalized Parato Distribution (GPD)

กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots$ เป็นลำดับของความสัมพันธ์ของดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยและตลาดหลักทรัพย์อินโดนีเซีย มีดังนี้ 1.ดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (SET Index) 2.ดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์ประเทศอินโดนีเซีย (JCI) 3.เงินลงทุนโดยตรงจากต่างประเทศ (FDI) 4.ผลิตภัณฑ์มวลรวมประชาชาติ (GDP) 5.อัตราเงินเฟ้อ (Inflation rate) 6.อัตราการว่างงาน (Unemployment rate) ของไทยและอินโดนีเซีย

โดยจะทำการวัดของคุณลักษณะ extreme เป็นมูลค่าของ X_1 นั้นมากกว่า high threshold u การนิยาม excess distribution ข้างต้นโดย threshold u เป็นค่าความเป็นไปได้แบบมีเงื่อนไข ซึ่งสามารถแสดงการแจกแจงส่วนเกินเป็นเช่นเดียวกับ Generalized Pareto distribution (GPD)

$$G_{\varepsilon\beta_1(u)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1-(1+(\dfrac{\varepsilon_y}{\beta(u)})^{\frac{-1}{\tau}}\ \xi \neq 0}{1-\exp(-\dfrac{y}{\beta(u)})\xi \neq 0}, \beta(u>0) \end{cases}$$

กำหนดให้ $y \geq 0, \xi \geq 0, 0 \leq y \leq -\dfrac{\beta(u)}{\xi}; \xi < 0$

การทดสอบคุณสมบัติ Generalized Pareto distribution (GPD) จะทดสอบด้วย ฟังชันค่าเฉลี่ยส่วนเกิน (Mean Excess Function) ที่ สมมติว่า ขอบเขตส่วนเกิน $X - u_0$ ตาม GPD โดยค่าพารามิเตอร์ $\xi < 1, \beta(u_0)$ ทำให้ค่าเฉลี่ยส่วนเกินนอกเหนือขอบเขต u_0 คือ

$$E\{X - u_0 | X > u_0 \} = \frac{\beta(u_0)}{1-\xi}$$

ถ้า $u > u_0$ การนิยามฟังชันค่าเฉลี่ยส่วนเกิน $e(u)$ เป็น

$$e(u) = E\{X - u | X - u\} = \frac{\beta(u_0) + \xi(u - u_0)}{1-\xi}$$

ในกรณีใดก็ตามที่ $y > 0$

$$e(u_0 + y) = E\{X - (u_0 + y) | X > u_0 + y\} = \frac{\beta(u_0) + \xi(y)}{1-\xi}$$

ฟังก์ชันค่าเฉลี่ยส่วนเกินเป็นฟังชันเชิงเส้นของ $y = u - u_0$ ผลลัพธ์นี้เป็นจุดมุ่งหมายในฉายภาย แบบง่ายสู่การอนุมานขอบเขตมูลค่า u_0 ที่เหมาะสมเพื่อ GPD

3.3.5 การประมาณ GPD by Maximum Likelihood

การประมาณแบบจำลอง GPD ที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ ξ และ $\beta(u)$ ซึ่ง $\xi \neq 0$ สามารถใช้ฟังชันของlog-likelihood จะหาได้จาก

$$1(\xi\beta(u)) = -k\ln(\beta(u)) - (1 + {}^{1}\!/\!{}_{\xi})\sum_{i=1}^{k}\ln(\frac{1+\xi y_i}{\beta(u)})$$

โดยให้ $y_i \geq 0; \xi > 0, 0 \leq y_i \leq -\dfrac{\beta(u)}{\xi}; \xi < 0$

ในกรณีที่ $\xi = 0$ ฟังชัน *log-likelihood* หาได้จาก

$$1(\beta(u)) = -k\ln(\beta(u)) - \beta(u)^{-1}\sum_{i=1}^{k} y_i$$

3.3.6 การประมาณค่าสัมประสิทธ์ความสัมพันธ์ ในแบบจำลองการกระจาย Generalized Parato Distribution (GPD) ด้วยวิธี Copula

ในการประมาณ bivariate distribution สำหรับตัวแปรเชิงสุ่มสองตัวแปร โดยการใช้ทฤษฎีของ Sklar ที่กล่าวถึงความเป็นไปได้ในการประมาณค่า bivariate distribution F(x,y) โดยกำหนดให้ marginal distributions Fx(x) และ Fy(y) และ Copula C(u,v) ด้วยความหนาแน่น c สามารถประมาณด้วย วิธีการของ maximum likelihood ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้จะทำการเลือกรูปแบบฟังก์ชั่น copula 1. Normal copula 2.Frank copula มาทำการประมาณด้วยวิธี maximum likelihood และจะทำการคัดเลือกด้วยวิธี Akaike's Information Criterion(AIC) Bayesian Information Criterion (BIC) Hannan-Quinn Criterion(HQ) เพื่อคัดเลือกแบบจำลอง bivariate distribution ในการประมาณด้วยวิธี Copula และหลังจากได้แบบจำลองที่เหมาะสมที่สุดแล้วจะทำการประมาณค่าความสัมพันธ์ ด้วยวิธี Kendall's tau และ Spearman's rho ซึ่งการคัดเลือก marginal distributions ในขั้นตอนนี้จะใช้การกระจายแบบ Generalized Parato Distribution (GPD) แล้วจึงนำมารวมเป็น bivariate distribution ในรูปแบบต่างๆ ดังกล่าวข้างต้น

ฟังก์ชันคอบปูลา คือการวิเคราะห์ข้อมูลเป็นช่วงเวลาในตัวแปรสุ่มแบบมีเงื่อนไข โดยกำหนดให้เงื่อนไขของตัวแปรคือ F_{t-1} นั่นคือคอบปูลาแบบมีเงื่อนไข (Joe 1997; Nelsen 2006; Embrechts 2009) กำหนดให้ $(x,y)|F_{t-1}, X|F_{t-1} \approx F_t$ และ $y|F_{t-1} \approx G_t$ คือฟังชันการการแจกแจงร่วมแบบมีเงื่อนไขของ $U_t \equiv F_t(x|F_{t-1})$ และ $V_t \equiv G_t(y|F_{t-1})$ จาก F_{t-1} คือค่าคอบปูลาแบบมีเงื่อนไขสองโดเมน

การแจกแจงตัวแบบมีเงื่อนไขจะประยุกต์ทฤษฎีของ สการ์ และในการหาความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงและฟังชันความหนาแน่นสามารถแสดงความหนาแน่นของคอบปูลาสองตัวแปร

$$G_t(F_t x|F_{t-1}), G_t(y|F_{t-1})|F_{t-1}), G_t(F_t(x|F_{t-1}), G_t(y|F_{t-1})|F_{t-1}$$

$$H_t(x,y|F_{t-1}) = \frac{\partial^2 \left[C_t(F_t(x|F_{t-1}), G_t(y|F_{t-1})|F_{t-1})\right]}{\partial F_t(x|F_{t-1}), G_t(y|F_{t-1})} \cdot \frac{\partial F_t(x|F_{t-1})}{\partial x} \cdot \frac{\partial G_t(y|F_{t-1})}{\partial y}$$

$$= c_t(F_t(x|F_{t-1}), g_t(y|F_{t-1})|F_{t-1}), f_t(x|F_{t-1}), g_t(y|F_{t-1})$$

$$c_t(u,v|F_{t-1}) = h_t(x,y|F_{t-1}) / f_t(x|F_{t-1}).g_t(y|F_{t-1})$$

เมื่อ $u \equiv F_t(x|F_{t-1}), v \equiv G_t(y|F_{t-1})$ สามารถใช้แสดงคอบปูลาแบบปกติและคอบปูลาแบบอื่นๆ โดยการประมาณจะทำการทดสอบ

1. แบบจำลอง Normal Copula

แบบจำลองหนึ่งที่ใช้มากที่สุดในคอบปูลาเพื่อการจำลองทางการเงินคือคอบปูลาของการแจกแจงปกติสองตัวแปรโดยค่าพารามิเตอร์ความสัมพันธ์ระหว่างกัน δ นิยามว่า

$$C(u,v) = \int_{-\alpha}^{\phi^{-1}(u)} dx \int_{-\alpha}^{\phi^{-1}(v)} dy \frac{1}{2N\sqrt{1\delta^2}} \exp\left\{\frac{-x^2 - 2\delta xy + y^2}{2(1-\delta^2)} - \right\}$$

$$= \phi_\delta(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v))$$

โดยที่ $\phi^{-1}(\cdot)$ คือค่าฟังชันคลอไทด์ของพื้นฐานการแจกแจงปกติและ ϕ_δ คือฟังชันการแจกแจงสะสมร่วมของพื้นฐานการแจกแจงปกติสองตัวแปรด้วยสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ $\delta(0 \le \delta \le 1)$ จากทฤษฎีของสการ์ แบบจำลองคอบปูลาแบบปกติ(normal copula)จัดเป็นการแจกแจงพื้นฐานปกติสองตัวแปรถ้าอย่างนั้นมาร์จินต้องเป็นปกติพื้นฐานแต่ถ้าอย่างอื่นแบบจำลองคอบปูลาไม่จัดเป็นการแจกแจงปกติพื้นฐานสองตัวแปร

2. แบบจำลอง Archimedean copula และ Frank copula

Archimedean copula สามารถเขียนในรูปของ

$$C(u,v) = \phi^{-1}[\phi(u) + \phi(v)]$$

สำหรับฟังชัน $\phi: I \rightarrow R^{+}$ มีลักษณะต่อเนื่อง,ลดลงอย่างเดียว,โค้งคว่ำและ $\phi(1)=0$ ซึ่งฟังชัน ϕ เรียกว่าArchimedean Generator , ϕ^{-1} คือส่วนกลับของฟังชันแบบจำลอง Frank Copula

Frank copula (Frank, 1979) มีฟังชันการแจกแจงดังนี้

$$C(u,v) = -\delta \log\left(\frac{\ln-(1-e^{-\delta u})(1-e^{\delta v})}{\eta} \right)$$

โดยที่ $0<\delta<\infty, \eta = 1-\hat{e}-\delta$ ตัวจัดการฟังชัดกำหนดโดย

$$\phi(t) = -\ln\left(\frac{e^{-\delta t}-1}{e^{-\delta}-1} \right)$$

3.3.7 หลักการอนุมานสำหรับส่วนขอบ (IFM)

ซึ่งสามารถประมาณค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละฟังชันความหนาแน่นร่วมในกรณีสองตัวแปรแบบมีเงื่อนไข (Joe and Xu 1996)คือ

$$h(x,y|F_{t-1}:\theta_\eta) \equiv f_t(x|F_{t-1}:\theta_f)\cdot g_t(y|F_{t-1}:\theta_g)\cdot c_t(u,v|F_{t-1}:\theta_c)$$

ที่ $u \equiv F_t(x|F_{t-1}:\theta_f)$ และ $v \equiv G_t(y|F_{t-1}):\theta_g$ และ $\theta_\eta, \theta_f, \theta_g, \theta_c$ คือมาร์จินัลความหนาแน่นร่วมและ ค่าพารามิเตอร์คอบปูลาเวกเตอร์ตามลำดับ กับ $\theta_\eta \equiv [\theta_f^t, \theta_g^t, \theta_c^t]$ วิเคราะห์ค่าควรเป็นสูงสุด (Maximum likelihood analysis) โดย(BOLLERSLEV and WOOLDRIDGE 1992)

$$L_{xy}(\theta_\eta) = L_x(\theta_f) + L_y(\theta_g) + L_c(\theta_f, \theta_g, \theta_c)$$

โดยที่ $L_{xy}(\theta_\eta) \equiv \log h_t(x,y|F_{t-1}:\theta_\eta), L_x(\theta_t) \equiv \log f_t(x|F_{t-1}:\theta_f),$

$L_y(\theta_g) \equiv \log g_t(y|F_{t-1}:\theta_g),$ และ $L_c(\theta_f,\theta_g,\theta_c) \equiv \log c(u,v|F_{t-1}:\theta_c)$

ดังนั้น วิธีการอนุมานตามขอบ ค่าพาราเมเตอรของการแจกแจงของมาร์จินัล การประมาณต่างหาก จากค่าพาราเมเตอร์ของคอบปูลา และกระบวนการประมาณค่าแบ่งได้ 2ขั้นตอนคือ

การประมาณค่าพาราเมเตอร์ θ_f และ θ_g ของการกระจายแบบมาร์จินัล F_t และ G_t โดยใช้หลัก ความควรเป็นสูงสุด

$$\hat{\theta}_f = \arg\max L(\theta_f) = \arg\max \sum_{t=1}^{\tau} \log f_t(x_t;\theta_f)$$
$$\hat{\theta}_g = \arg\max L(\theta_g) = \arg\max \sum_{t=1}^{\tau} \log g_t(y_t;\theta_g)$$

ถ้าค่าพารามเตอร์ของเวกเตอร์การแจกแจงแบบเสรี

$$\hat{\theta}_f, \hat{\theta}_g = \arg\max\left[L_{(\theta_f)} + L_{(\theta_g)}\right] = \arg\max \sum_{t=1}^{\tau}\left[\log f_t(x_t;\theta_f) + \log g_t(y_t;\theta_g)\right]$$

การประมาณค่าพารามเตอร์ของคอบปูลา θ_c จากข้อ 1

$$\hat{\theta}_c = \arg\max L(\theta_c) = \arg\max \sum_{t=1}^{\tau} \log\left[c_t(F_t(x_t;\hat{\theta}_f), G_t(y_t;\hat{\theta}_g);\theta_c\right]$$

การประมาณค่าแบบความควรจะเป็นสูงสุด ต้องยืนยันคุณสมบัติของเชิงเส้นกำกับแบบปกติ แต่เมตริกความแปรปรวนต้องปรับเปลี่ยน (Joe 1997; Patton 2006)

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_h - \theta_0) \rightarrow N(0, V^{-1}(\theta_0))$$

$V(\theta_0) = D^{-1}M(D^{-1})^{\tau}$ คือ เมตริกแบบก็อดดัมบี(Godambe Information Matrix) ฟังชันคะแนน คือ $D = E[\partial_g(\theta)^{\tau} / \partial\theta], M = E[g(\theta)^{\tau} g(\theta)]$
และ $g(\theta) = (\partial L_x / \partial\theta_f, \partial L_y / \partial\theta_g, \partial L_c / \partial\theta_\theta)$

3.3.8 การวัดความสัมพันธ์และคอบปูลา (Kendall's Tau and Spearman's Rho**)**

ในขั้นตอนนี้จะได้แบบจำลอง bivariate distribution F(x,y) ที่เหมาะสมแล้วด้วยการทดสอบค่า Akaike's Information Criterion(AIC) Bayesian Information Criterion (BIC) Hannan-Quinn Criterion(HQ) จึงทำการประมาณค่าความสัมพันธ์ Kendall's tau statistic ที่กำหนดให้ F คือ ฟังชันการแจกแจงสองตัวแปรต่อเนื่อง และให้ (X_1, Y_1) และ (X_2, Y_2) เป็นสองส่วนที่ไม่สัมพันธ์ของตัวแปรสุ่มจากการแจกแจงนี้ และกำหนดให้เป็นเวคเตอร์ที่สอดคล้องกัน (X_1, Y_1) และ (X_2, Y_2) ถ้า $X_1 > X_2$ และ $Y_1 > Y_2$ และ $X_1 < X_2$ เมื่อ $Y_1 < Y_2$ บอกได้ว่ามีความพ้องกันและไม่เป็นจริงในกรณีกลับกัน

นิยามการแจกแจงของฟังชัน Kendall's tau statistic ได้ดังนี้

$$\tau = \Pr\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - \Pr\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}$$

ถ้า C คือคอบปูลาที่ประกอบด้วย F สามารถแสดงได้ว่า

$$\tau = 4\iint_{12} CdC - 1 = 4\iint_{12} C(u,v)c(u,v)dudv - 1$$

โดยที่c(u,v) คือความหนาแน่นของคอบปูลา การประมาณ ของ τ สำหรับตัวแปรสุ่มมีขนาด n คือตัวเลขของตัวสุ่มคู่ความสัมพันธ์ลบด้วยคู่ที่ไม่มีความสัมพันธ์หารด้วยจำนวนของคู่ทั้งหมด $\frac{n}{2}$:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{1 \le i \le j \le n} sign((x_i - x_j)(y_i - y_j))$$

และทำการคำนวณค่าความสัมพันธ์ Spearman's rho statistic (ρ_s) นิยามเป็นว่า สหสัมพันธ์ระหว่าง $F_x(X), F_y(Y)$ ซึ่งการวัดของลำดับสหสัมพันธ์ในส่วนของ integral transforms ของ X,Y สำหรับคอบปูลาที่ประกอบด้วย X,Y สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\rho_s = 12\iint_{12} C(u,v)dudv - 3$$

สำหรับการขนาดทดลอง $n\rho_s$ อาจประมาณได้โดยใช้

$$\hat{\rho}_s = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(rank(X_i) - \frac{n+1}{2} \right) \left(rank(y_i) - \frac{n+1}{2} \right)$$

ถึงกระนั้นทั้ง ρ_s, τ คือการวัดของความพ้องกัน ค่าเหล่านั้นสามารถแตกต่างกันได้เล็กน้อย Nelson (1999) ได้สรุปความสัมพันธ์ระหว่าง ρ_s, τ ที่เป็นอสมการไว้ดังนี้

$$\frac{3\tau - 1}{2} \le \rho_s \le \frac{1 + 2\tau - \tau^2}{2}; \tau > 0$$

$$\frac{\tau^2 + 2\tau - 1}{2} \le \rho_s \le \frac{1 + 3\tau}{2}; \tau < 0$$