บทที่ 3

ทฤษฎีและแบบจำลองที่ใช้ในการศึกษา

3.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาการประมาณค่าความผันผวนของผลตอบแทนในดัชนีSET50โดยใช้แนวคิดและทฤษฎีเกี่ยวกับการวิเคราะห์อนุกรมเวลา การทดสอบความนิ่งของข้อมูล การทดสอบ Unit Root แบบจำลอง Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH)

1) ข้อมูลอนุกรมเวลา (Time Series Data) คือค่าสังเกต(Observation) ชุดหนึ่งซึ่งถูกกำหนด ณ เวลาต่างๆถ้าค่าสังเกตกระทำในเวลาที่ต่อเนื่องกันจะเรียกว่า ข้อมูลอนุกรมเวลาต่อเนื่อง แต่ถ้าค่าสังเกตกระทำ ณ จุดที่ไม่ต่อเนื่องกัน เรียกว่าข้อมูลอนุกรมเวลาไม่ต่อเนื่อง ดังนั้นการวิเคราะห์อนุกรมเวลาจึงเป็นการวิเคราะห์ค่าสังเกตที่มีการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลาที่มีการกระทำซึ่งถ้าอนุกรมเวลาแสดงให้เห็นรูปแบบการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลาที่ผ่านมาในอดีตก็จะทำให้สามารถคาดการณ์ได้ว่าในอนาคตลักษณะการเปลี่ยนแปลงควรอยู่ในรูปแบบใด และสามารถพยากรณ์การเปลี่ยนแปลงข้อมูลในอนาคตได้ การวิเคราะห์ข้อมูลอนุกรมเวลานี้จะขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงของเวลาในอดีตเป็นพื้นฐาน

การพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาต้องอยู่บนสมมติฐานที่ว่า ข้อมูลอนุกรมเวลาต้องมีลักษณะนิ่ง (Stationary) (Enders, Walter, 1995)ซึ่งสามารถพิจารณาความนิ่งของข้อมูลได้จาก

ค่าเฉลี่ย(Mean) : $E(X_t) = \mu$ (1)

ค่าความแปรปรวน (Variance) : $V(X_t) = E(X_t - \mu) = \sigma^2$ (2)

ค่าความแปรปรวนร่วม(covariance) : $COV(X_t, X_{t+k}) = E(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu) = \sigma_k - \mu$ (3)

โดยที่ X แทนข้อมูลอนุกรมเวลาซึ่งเป็นกระบวนการสุ่ม

ข้อมูลที่มีลักษณะนิ่งต้องมีค่าเฉลี่ย(Mean) และความแปรปรวน(variance)เท่ากันตลอดระยะเวลาที่ทำการศึกษา

2) การทดสอบความนิ่งของข้อมูล (Unit Root Tests)

วิธีการทดสอบ Unit Root หรืออันดับความสัมพันธ์ของข้อมูล (Order of Integration) เป็นการทดสอบตัวแปรทางเศรษฐกิจต่างๆ ที่จะนำไปใช้ในสมการว่าข้อมูลมีลักษณะ

"นิ่ง" [I(0); Integrated of Order Zero] หรือ "ไม่นิ่ง" [I(d); d > 0, Integrated of Order d] ซึ่งเป็นขั้นตอนแรกในการศึกษาข้อมูลอนุกรมเวลา ถ้าเราไม่สามารถปฏิเสธ ข้อสมมติฐานว่าตัวแปรหนึ่งๆ (x) เป็น Unit Root แล้ว ก็เท่ากับเราพบว่า ตัวแปรนั้นไม่นิ่ง ซึ่งวิธีการทดสอบ Unit Root นั้นสามารถทดสอบโดยใช้การทดสอบ Dicky-Fuller (DF Test) (Dicky and Fuller, 1981) และการทดสอบ Augmented Dicky-Fuller (ADF Test) ที่ Said and Dicky ได้กล่าวไว้ เพื่อทดสอบความนิ่งของข้อมูลที่นำมาศึกษา โดยนำค่า ADF t-statistic ของข้อมูลที่ทำการทดสอบมาเปรียบเทียบกับค่าวิกฤติ MacKinnon แสดงว่าข้อมูลมีความนิ่ง (Stationary) และสามารถปฏิเสธสมมติฐาน โดยสมมติให้ความสัมพันธ์เป็นดังนี้

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t \qquad (4)$$

$$X_t = \rho X_{t-1} + e_t \qquad (5)$$

โดยที่ Y_t คือ ตัวแปรตาม

X_t , X_{t-1} คือ ข้อมูลอนุกรมเวลาของตัวแปรอิสระ ณ เวลา t และ t-1

α, β คือ ค่าพารามิเตอร์

ρ คือ ค่าสัมประสิทธิ์อัตสหสัมพันธ์ (Autocorrelation eficient)

ε_t , e_t คือ ค่าความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่ม (Random Error)

สมมติฐานของการทดสอบ คือ

$H_o : \rho = 1$

$H_1 : |\rho| < 1$; -1, $\rho < 1$

การทดสอบว่าตัวแปรที่ศึกษา (X_t) มียูนิทรูทหรือไม่ สามารถพิจารณาได้จากค่า ρ โดยที่

ถ้ายอมรับ $H_o : \rho = 1$ หมายความว่า X_t มียูนิทรูท หรือ X_t มีลักษณะไม่นิ่ง

ถ้ายอมรับ $H_1 : |\rho| < 1$ หมายความว่า X_t ไม่มียูนิทรูท หรือ X_t มีลักษณะนิ่ง

จากการเปรียบเทียบค่า t-statistics ที่คำนวณได้กับค่าในตาราง Dicky-Fuller ซึ่งค่า t-statistics ที่น้อยกว่าค่าในตาราง Dicky-Fuller จะสามารถปฏิเสธสมมติฐานได้ แสดงว่าตัวแปรที่นำมาทดสอบมีลักษณะนิ่ง หรือ เป็น Integrated of Order Zero แทนด้วย $X_t \sim I(0)$

อย่างไรก็ตามการทดสอบยูนิทรูทดังกล่าวข้างต้น สามารถทำได้อีกวิธีหนึ่ง คือให้

$$\rho \quad = \quad (1+\theta)\ ;\ -1 < \theta < 1 \tag{6}$$

โดยที่ θ = พารามิเตอร์

จะได้

$$X_t = (1+\theta)X_{t-1} + e_t \tag{7}$$

$$X_t = X_{t-1} + \theta X_{t-1} + e_t \tag{8}$$

$$X_t - X_{t-1} = \theta X_{t-1} + e_t \tag{9}$$

$$\Delta X_t = \theta X_{t-1} + e_t \tag{10}$$

จะได้สมมติฐานการทดสอบ Dicky-Fuller (DF) คือ

$H_0: \theta = 0$ (X_t เป็นตัวแปรที่มีลักษณะไม่นิ่ง หรือมียูนิทรูท)

$H_1: \theta < 0$ (X_t เป็นตัวแปรที่มีลักษณะนิ่ง หรือไม่มียูนิทรูท)

ถ้ายอมรับ $H_0: \theta = 0$ จะได้ว่า $\rho = 1$ หมายความว่า ตัวแปรที่ศึกษา (X_t) มียูนิทรูท หรือ มีลักษณะไม่นิ่ง (Non-Stationary) เนื่องจากข้อมูลอนุกรมเวลา ณ เวลา t มีส่วนสัมพันธ์กับข้อมูลอนุกรมเวลา ณ เวลา t-1 แต่ถ้ายอมรับ $H_1: \theta < 0$จะได้ว่า $\rho < 1$ หมายความว่า ตัวแปรที่ศึกษา (X_t) ไม่มียูนิทรูท หรือ มีลักษณะนิ่ง (Stationary)

เนื่องจากข้อมูลอนุกรมเวลา ณ เวลา t มีส่วนสัมพันธ์กับข้อมูลอนุกรมเวลา ณ เวลา t-1 ค่าคงที่และแนวโน้มดังนั้น Dicky-Fuller จึงพิจารณาสมการถดถอย 3 รูปแบบที่แตกต่างกัน ในการทดสอบว่ามียูนิทรูทหรือไม่ ได้แก่

Random Walk Process $\quad \Delta X_t = \theta X_{t-1} + e_t$ (11)

Random Walk Drift $\quad \Delta X_t = \alpha + \theta X_{t-1} + e_t$ (12)

Random Walk with Driff and Linear Time Trend $\quad \Delta X_t = \alpha + \beta t + \theta X_{t-1} + e_t$ (13)

โดยที่ X_t, X_{t-1}	คือ	ข้อมูลอนุกรมเวลาของตัวแปรอิสระ ณ เวลา t และ t-1
α, β, θ	คือ	ค่าพารามิเตอร์
t	คือ	แนวโน้มเวลา
e_t	คือ	ค่าความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่ม

การตั้งสมมติฐานการทดสอบ Dicky-Fuller เป็นเช่นเดียวกับที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ส่วนการทดสอบโดยใช้ Augmented Dicky-Fuller (ADF Test) โดยการเพิ่มขบวนการถดถอยในตัวเอง (Autoregressive Process) เข้าไปในสมการ ซึ่งเป็นการแก้ปัญหากรณีที่ใช้การทดสอบ Dicky-Fuller แล้วค่า D.W. (Durbin-Watson Statistic) ต่ำ การเพิ่มขบวนการถดถอยในตัวเองเข้าไปนั้น ผลการทดสอบ ADF จะทำให้ได้ค่า D.W. เข้าใกล้ 2 ทำให้ได้สมการใหม่จากการเพิ่มจำนวนของตัวแปรล่า (Lagged Difference Terms, p) ซึ่งจะขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของข้อมูล หรือ สามารถใส่จำนวน Lagged Difference Terms, p เข้าไปได้จนกระทั่งไม่เกิดปัญหา Autocorrelation ดังนี้

$$\Delta X_t = \theta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \Delta X_{t-i} + e_t \qquad (14)$$

$$\Delta X_t = \alpha + \theta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \Delta X_{t-i} + e_t \qquad (15)$$

$$\Delta X_t = \alpha + \beta t + \theta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \Delta X_{t-i} + e_t \qquad (16)$$

โดยที่ X_t, X_{t-i} คือ ข้อมูลอนุกรมเวลาของตัวแปรอิสระ ณ เวลา t และ t-i

$\alpha, \beta, \theta, \phi$ คือ ค่าพารามิเตอร์

t คือ แนวโน้มเวลา

e_t คือ ค่าความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่ม

จำนวน Lagged Difference Terms, p ที่เพิ่มเข้าไปในสมการจะขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของแต่ละงานวิจัยหรือสามารถใส่จำนวน Lagged Difference Terms, p เข้าไปได้จนกว่าค่าความคลาดเคลื่อนจะไม่เกิดปัญหา Autocorrelation จำนวนของตัวแปรล่า (Lagged Difference Terms, p) ที่จะนำเข้ามารวมในสมการนั้น จะต้องมีมากพอที่จะทำให้ตัวแปรความคลาดเคลื่อน (Error Terms) มีลักษณะเป็นอิสระต่อกัน (Serially Independent) และเมื่อนำเอาการทดสอบ DF Test มาใช้กับสมการ (14), (15), (16) แล้ว เราจะเรียกว่า Augmented Dicky – Fuller (ADF Test) ซึ่งค่าสถิติทดสอบ ADF จะมีการแจกแจงเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Distribution) เหมือนกับค่าสถิติ DF ดังนั้นก็สามารถใช้ค่าวิกฤต (Critical Value) แบบเดียวกันได้ (Gujarati, 1995: 720 Quoted in Dimitrova, 2005)

โดยในการทดสอบสมมติฐานทั้งวิธี Dicky-Fuller Test (DF Test) และ Augmented Dicky-Fuller (ADF Test) จะทดสอบเพื่อให้ทราบว่าตัวแปรที่ศึกษานั้นมียูนิทรูทหรือไม่ สามารถพิจารณาได้จากค่า θ ถ้ามีค่าเท่ากับ 0 แสดงว่า ตัวแปรที่สนใจมียูนิทรูท

สมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบ คือ

$H_0 : \theta = 0$ (X_t เป็นตัวแปรที่มีลักษณะไม่นิ่งหรือ Non-stationary)

$H_1 : \theta < 0$ (X_t เป็น ตัวแปรที่มีลักษณะนิ่งหรือ Stationary)

สามารถทดสอบสมมติฐานได้โดยการเปรียบเทียบค่า t-statistic ที่คำนวณได้กับค่าในตาราง Dicky-Fuller ซึ่งค่า t-statistic ที่จะนำมาทดสอบสมมติฐานในแต่ละรูปแบบนั้นจะต้องนำไปเปรียบเทียบกับตาราง Dicky-Fuller ณ ระดับต่างๆ ถ้าสามารถปฏิเสธสมมติฐานได้แสดงว่าตัวแปรที่นำมาทดสอบมีลักษณะนิ่ง หรือ เป็น Integrated of Order Zero แทนด้วย $X_t \sim$ I(0)

กรณีที่การทดสอบสมมติฐานพบว่า ตัวแปรที่ศึกษามียูนิทรูทหรือมีลักษณะไม่นิ่งจะต้องนำค่า ΔX_t มาทำ Differencing จนกระทั่งสามารถปฏิเสธสมมติฐานที่ว่า X_t มีลักษณะไม่นิ่งได้ เพื่อทราบว่า Order of Integration (d) ว่าอยู่ในระดับใด [$X_t \sim$ I(d) ; d > 0]

3) การเลือกแบบจำลองที่เหมาะสมจากการทดสอบ Unit Root โดยการทดสอบสัมประสิทธิ์ของการถดถอย (Deterministic Regressors)

เป็นการทดสอบว่าแบบจำลองใดเป็นแบบจำลองที่เหมาะสมที่สุดใน 3 กรณีระหว่างกรณีของแบบจำลองที่ไม่มีค่าคงที่และแนวโน้มเวลา (None) แบบจำลองที่มีค่าคงที่(Intercept) และแบบจำลองที่มีค่าคงที่และแนวโน้มเวลา(Trend and Intercept) โดยขั้นตอนการทดสอบดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เริมการทดสอบจากแบบจำลองทีมีทั้งค่าคงที่และแนวโน้มเวลาตามสมการ

$$\Delta X_t = a_0 + \gamma Y_{t-1} + a_{2t} + \sum \beta_i \, \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (17)$$

ทำการทดสอบสมมติฐานว่า $H_0 : \gamma = 0$ โดยใช้ τ_r statistic ถ้าเกิดการปฏิเสธสมมติฐานว่างแสดงว่าข้อมูล Y_t มีลักษณะนิ่งแล้ว และเลือกใช้แบบจำลองที่มีทั้งค่าคงที่และแนวโน้มเวลา

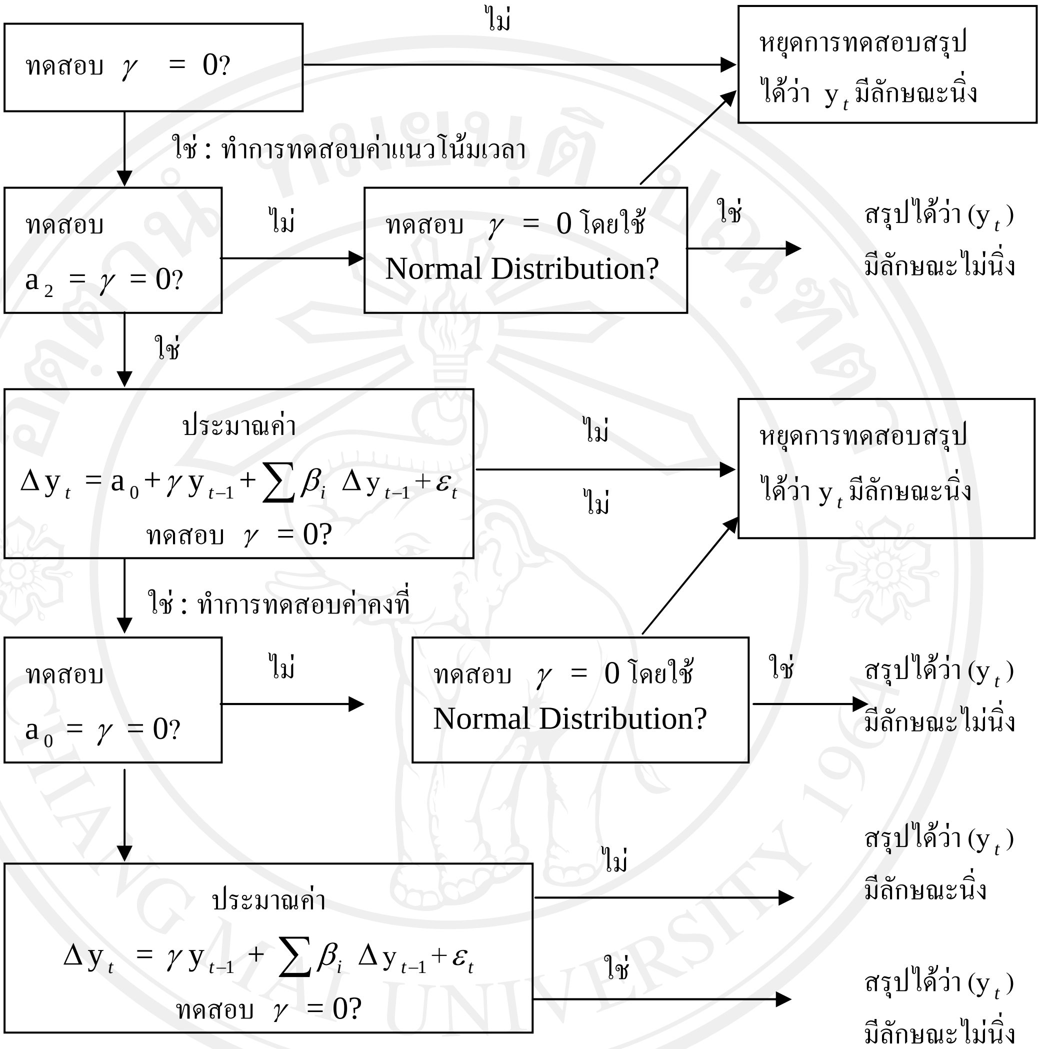
ขั้นตอนที่ 2 ถ้าเกิดการยอมรับสมมติฐานว่างในขั้นตอนที่ 1 แสดงว่าใน a_{2t} ที่อยู่ในสมการโดยการทดสอบสมมติฐานว่า $H_0 : a_2 = \gamma = 0$ โดยใช้ ϕ_3 แบบจำลองดังกล่าวมีตัวถดถอยที่ไม่จำเป็นอยู่ในสมการ ซึ่งอาจทำให้อำนาจการทดสอบของสมการลดลงดังนั้น จึงต้องมีการทดสอบความมานัยสำคัญทางสถิติของค่าแนวโน้ม statistic ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ของค่าแนวโน้มไม่มีนัยสำคัญทางสถิติให้ข้ามไปทำขั้นตอนที่ 3 อย่างไรก็ตามถ้าค่าสัมประสิทธิ์ของค่าแนวโน้มมีนัยสำคัญทาง

สถิติให้ทดสอบความไม่นิ่งของข้อมูลอีกครั้งโดยใช้การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (Standardized Normal Distribution) ถ้าเกิดการปฏิเสธสมมติฐานว่าแสดงว่าข้อมูล y_t มีลักษณะนิ่งแล้วและเลือกใช้แบบจำลองที่มีทั้งค่าคงที่และแนวโน้มเวลา แต่ถ้าเกิดการยอมรับสมมติฐานว่างแสดงว่าข้อมูล y_t มีลักษณะไม่นิ่ง

ขั้นตอนที่ 3 ทำการประมาณค่าแบบจำลองตามสมการ(11) ที่ปราศจากค่าแนวโน้มเวลาและทดสอบ Unit Root โดยใช้ τ_μ statistic ถ้าเกิดการปฏิเสธสมมติฐานว่างแสดงว่าข้อมูล y_t มีลักษณะความนิ่งแล้วและเลือกใช้แบบจำลองที่ปราศจากค่าแนวโน้มเวลา แต่ถ้าเกิดการยอมรับสมมติฐานว่าให้ทำการทดสอบความไม่นิ่งของข้อมูลอีกครั้งโดยใช้การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (Standardized normal distribution) ถ้าเกิดการปฏิเสธสมมติฐานว่างแสดงว่าข้อมูล y_t มีลักษณะนิ่งแล้วและเลือกใช้แบบจำลองที่มีทั้งค่าคงที่และแนวโน้มเวลาแต่ถ้าเกิดการยอมรับสมมติฐานว่างแสดงว่าข้อมูล y_t มีลักษณะไม่นิ่ง

ขั้นตอนที่ 4 ทำการประมาณค่าแบบจำลองตามสมการ (11) ที่ปราศจากค่าแนวโน้มเวลาและค่าคงที่ และทดสอบ Unit Root โดยใช้ τ statistic ถ้าเกิดการปฏิเสธสมมติฐานว่าง แสดงว่าข้อมูล y_t มีลักษณะนิ่งแล้วและเลือกใช้แบบจำลองที่ปราศจากค่าแนวโน้มเวลาและค่าคงที่แต่ถ้าเกิดการยอมรับสมมติฐานว่า แสดงว่าข้อมูล y_t มีลักษณะไม่นิ่ง

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นตอนการเลือกแบบจำลองที่เหมาะสม



4) แบบจำลอง Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH)

ในการวิเคราะห์อนุกรมเวลาส่วนใหญ่แล้วจะมีการกำหนด Stochastic Variable ให้มีความแปรปรวนคงที่ (Homoscedastic) ซึ่งในการประยุกต์ใช้กับบางข้อมูลนั้นค่าความแปรปรวนของค่าความคาดเคลื่อน (Error Term) จะไม่ใช่ฟังก์ชั่นของตัวแปรอิสระแต่มีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามช่วงเวลาขึ้นอยู่กับขนาดของความคาดเคลื่อนที่เกิดในอดีต และในบางการศึกษาเช่น แบบจำลองของเงินเฟ้อ อัตราดอกเบี้ยหรือผลตอบแทนจากตลาดหลักทรัพย์ในบางคาบเวลาจะมีความผันผวน (Volatility) สูง(และค่าความคาดเคลื่อนขนาดใหญ่)ตามด้วยคาบเวลาที่มีความผันผวน (Volatility) ต่ำ (และมีค่าความคาดเคลื่อนที่มีขนาดเล็ก) สรุปได้ว่าค่าความแปรปรวนของค่าความคาดเคลื่อนจากการถดถอยจะขึ้นอยู่กับค่าความผันผวน (Volatility) ของค่าความคลาดเคลื่อนในอดีตที่ผ่านมา

ความเป็นไปได้ในการหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของอนุกรมเวลาไปพร้อมกันนั้นในขั้นต้นการพยากรณ์อย่างมีเงื่อนไขจะมีความแม่นยำเหนือการพยากรณ์อย่างไม่มีเงื่อนไขมาก ซึ่งจากแบบจำลอง Autoregressive Moving Average(ARMA)ซึ่งแสดงได้ดังสมการ(12)

$$X_t = a_0 + a_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{18}$$

และต้องการพยากรณ์ X_{t+1} อย่างมีเงื่อนไข ดังนี้คือ

$$E_t X_{t+1} = a_0 + a_1 X_t \tag{19}$$

ถ้าเราใช้ค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขในการพยากรณ์ X_{t+1} ค่าความคลาดเคลื่อนของความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขที่พยากรณ์ได้ดังนี้ คือ

$$E_t[(X_{t+1} - a_0 - a_1 X_t)^2] = E_t \varepsilon^2_{t+1} = \sigma^2 \tag{20}$$

ถ้าเปลี่ยนไปใช้การพยากรณ์อย่างไม่มีเงื่อนไขแล้ว ผลที่จะใช้เป็นค่าเฉลี่ยในช่วง Long-Run ของลำดับ $\{X_t\}$ ซึ่งเท่ากับ $\frac{a_0}{(1-a_1)}$ จะได้ค่าความเคลื่อนคลาดของการพยากรณ์อย่างไม่มีเงื่อนไขดังสี้ คือ

$$E\{(X_{t+1} - \frac{a_0}{(1-a_1)})^2\} = E[(\varepsilon_{t+1} + a_1 \varepsilon_t + a_1^2 \varepsilon_{t-1} + a_1^3 \varepsilon_{t-2} + \ldots)^2] \tag{21}$$

เมื่อ $\frac{1}{(1-a_1)^2} > 1$ ค่าความแปรปรวน (Variance) จากการพยากรณ์แบบไม่มีเงื่อนไข (Unconditional Variance) จะมีค่าสูงกว่าความแปรปรวนของการพยากรณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional Variance) ในลักษณะเดียวกันถ้าความแปรปรวนของ $\{\varepsilon_t\}$ ไม่เป็นค่าคงที่ จะสามารถประมาณค่าแนวโน้มของการเปลี่ยนแปลงความแปรปรวนโดยใช้ ARMA Model โดยให้ $\{\varepsilon_t\}$ แทนส่วนที่เหลือResiduals) ที่ได้จากการประมาณจากสมการ(12)ดังนั้น ค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของ X_{t+1} จะได้ดังนี้

$$Var(X_{t+1}|X_t) = E[(X_{t+1} - a_0 - a_1 X_t)^2] = E_t \varepsilon^2_{t+1} \tag{22}$$

และจากที่ให้ $E_t \varepsilon^2_{t+1} = \sigma^2_{t+1}$ จึงแสดงว่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขไม่ใช่ค่าคงที่และจะได้แบบจำลองในการประมาณค่าส่วนที่เหลือ (Residuals) ออกมาดังนี้

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^2_{t+1} + \ldots.. + \alpha_q \varepsilon^2_{t-q} + \nu_t \tag{23}$$

เมื่อ ν_t = white noise process

ถ้าค่าของ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_q$ มีค่าเท่ากับศูนย์ ค่าความแปรปรวนจากการประมาณ จะเท่ากับค่าคงที่หรือคงตัว(Constant Variance) α_0 หรืออีกนัยหนึ่ง คือค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของ X_t จะมีการเปลี่ยนแปลงสอดคล้องกับ Autoregression ในสมการ(17) ดังนั้นจะสามารถใช้สมการ(17)ในการพยากรณ์ค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขที่เวลา t+1 ดังสมการ (24)

$$E_t \hat{\varepsilon}^2_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}^2_t + \alpha_2 \hat{\varepsilon}^2_{t-1} + \ldots + \alpha_q \hat{\varepsilon}^2_{t+1-q} \tag{24}$$

จากเหตุผลที่กล่าวมา สมการที่(17) เรียกว่า Autoregressive Conditional Heteroscedastic (ARCH) Model และสมการ (18)เป็น ARCH(q) โดยค่า $E_t \hat{\varepsilon}^2_{t+1}$ หรือ σ^2_{t+1} จะประกอบด้วย 2 องค์ประกอบ คือค่าคงที่และค่าความผันผวน(Volatility) ในคาบเวลาที่ผ่านมา ซึ่งเขียนได้เป็นส่วนเหลือกำลังสองของคาบในอดีต(ARCH term) ส่วนค่าสัมประสิทธิ์ ($\alpha_0, \alpha_1, \ldots\ldots \alpha_q$) สามารถหาค่าได้โดยวิธี Maximum Likelihood

5) แบบจำลอง Generallized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH)

แบบจำลอง ARCH ของ Engle, Robert F. ได้มีการพัฒนาต่อโดย Bollerslev ในปี 1986 ด้วยการให้ความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข (Conditional Variance) มีลักษณะเป็น ARMA process โดยที่ให้ Error Process มีลักษณะดังนี้ คือ

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{\sigma^2_t} \tag{25}$$

โดยที่ความแปรปรวนของ $v_t = \sigma^2_v = 1$ และ

$$\sigma^2_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i \varepsilon^2_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma^2_{t-i} \tag{26}$$

เมื่อ $\{V_t\}$ คือ White noise process ที่เป็นค่าอิสระจากเหตุการณ์ในอดีต (ε_{t-1}) ค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขของ ε_t จะเท่ากับศูนย์ ดังนี้ คือ

$$E\varepsilon_t = EV_t \sqrt{\sigma^2_t} = 0$$

สำหรับการหาความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของ ε_t ถูกกำหนดโดยสมการ

$$E_{t-1}\, \varepsilon^2_t = \sigma^2_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i \varepsilon^2_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma^2_{t-i} \tag{27}$$

ดังนั้นความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของ ε_t ถูกกำหนดโดย σ^2_t ในสมการ(26) แบบจำลองนี้จึงเรียกว่า Genralized autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH) (p,q) นั้นใช้กระบวนการ Autoregressive และ Moving Average ในการหาค่าความแปรปรวนที่มี

ลักษณะ Heteroscedastic Variance จะเห็นว่าถ้า p=0 และ q=1 เป็น GARCH (0,1)หรือคือ ARCH(1) นั่นเองโดยสรุปว่า β_1 ทั้งหมดมีค่าเป็นศูนย์แบบจำลอง GARCH (p,q) จะเทียบเท่ากับแบบจำลอง ARCH (q) คุณสมบัติที่สำคัญของแบบจำลอง GARCH คือค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของ disturbances ของค่า X_t สร้างขึ้นมาจากกระบวนการ ARMA จึงสามารถคาดได้ว่าส่วนเหลือจากการทำ ARMA จะแสดงถึงรูปแบบคุณลักษณะเดียวกัน เช่น ถ้าการประมาณค่า $\{X_t\}$ ด้วยกระบวนการ ARMA ค่า Autocorrelation Function (ACF) ซึ่งเป็นค่าสหสัมพันธ์ระหว่าตัวแปรสุ่มที่หน่วยเวลาห่างกันของกระบวนการเดียวกันและ Partial Autocorrelation Function (PACF)ของส่วนที่เหลือ (Residuals) ควรจะบ่งถึงกระบวนการ white noise และ ACFของกำลังสองของส่วนที่เหลือ (Aquared Residuals) นำมาช่วยในการระบุถึงลำดับ (Order) ของกระบวนการ GARCH (ทรงศักดิ์ ศรีบุญจิตต์, 2547 อ้างถึงใน สธนพล วิเชียรรัตนพันธ์, 2547)

แบบจำลอง GARCH ต่างๆนอกจากใช้ได้ประสบผลสำเร็จ แต่ก็มีข้อเสียอยู่สองประการในการประยุกต์ใช้กับการตั้งหรือคำนวณค่าทรัพย์สินประเภททุน

ประการแรก คือ ในกระบวนการ GARCH แบบสมมาตรนั้น ถ้ามีความผิดปกติ หรือ SHOCK เกิดขึ้น ไม่ว่าในทางบวกหรือทางลบ แต่อยู่ในระดับหรือขนาดเดียวกัน ซึ่งให้ระดับความแน่นอนที่เท่ากันแล้ว ค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขก็จะเพิ่มขึ้นในทางบวกหรือทางลบอย่างมากจนน่าตกใจ (Bollerslev, 1986) อย่างไรก็ตาม Black(1976) ได้พบความสัมพันธ์ที่เป็นลบตรงกันข้ามกันระหว่างผลตอบแทนในปัจจุบันกับความไม่แน่นอนที่เกิดจากความผันผวน (Volatility) ในอนาคต เช่น ความไม่แน่นอนมักจะสูงเมื่อมีข่าวร้ายและลดลงเมื่อมีข่าวดี ลักษณะความไม่สมมาตรของความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขนี้ เรียกว่า leverage effect คือ อิทธิพลจากค่ายกกำลัง ซึ่งแบบจำลอง GARCH แบบเส้นตรงไม่สามารถจับรูปแบบนี้ให้เห็นได้ เพราะค่าบวกหรือลบของผลตอบแทนในอดีตจะไม่มีส่วนมากำหนดความไม่แน่นอนที่ผันผวนในอนาคต หรือกล่าวว่า เฉพาะขนาดของค่าความคลาดเคลื่อนจากการประมาณการถดถอยโดยมีการทอดระยะเวลา (lagged residuals) เท่านั้นมีส่วนกำหนดค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข แต่ความเป็นบวกหรือลบของค่าความคลาดเคลื่อนไม่มีส่วนเกี่ยวข้อง ซึ่งข้อจำกัดนั้นเป็นจุดที่สำคัญประการแรกที่ก่อให้มีการพัฒนาแบบจำลองอื่นๆเช่น EGARCH, TGARCH เป็นต้น

ประการที่สอง แบบจำลอง GARCH ต่างๆกำหนดให้ตัวแปรต่างๆต้องไม่เป็นค่าลบเพื่อบังคับค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขมีค่าเป็นบวกเสมอ อย่างไรก็ตามข้อกำหนดบังคับนี้มักถูกฝ่าฝืนจากค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้มาจากการคำนวณ

เนื่องจากมีข้อเสียทั้งสองประการนั้น จึงได้มีผู้คิดประยุกต์แบบจำลองที่คล้ายกับ GARCH ขึ้นมาเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องดังกล่าว ในแบบต่างๆกัน

6) แบบจำลอง Generallized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Exogenous Variable (GARCH-X)

จากแบบจำลอง The GARCH(1,1) Model

รูปแบบทั่วไปของสมการ GARCH (1, 1) ดังนี้

$$R_t = a_0 + \sum_{t-i}^{p} a_1 R_{t-i} + \varepsilon_t \quad (28)$$

และ

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\ e_{t-1}^2 + \beta\ \sigma_{t-1}^2 \quad (29)$$

โดยสมการที่ (28) เป็นสมการ ค่าเฉลี่ย (Mean equation) ที่ถูกเขียนในรูปของ ฟังค์ชั่นของตัวแปรภายนอก (exogenous variable) ในเทอมของค่าความคาดเคลื่อน(error term) ถ้ากำหนดให้ σ_t^2 เป็นหนึ่งคาบเวลาความแปรปรวนที่ต้องการพยากรณ์ โดยอยู่บนข้อมูลข่าวสารในอดีต ซึ่งจะถูกเรียกว่า conditional variance ซึ่งสมการ conditional variance จะดังที่ระบุในสมการ (29) จะประกอบด้วย ตัวประกอบ 3 เทอม คือ

(1) ค่าเฉลี่ย: ω

(2) ข่าวสารที่มีผลกระทบต่อความผันผวนจากคาบเวลาในอดีตก่อนหน้า จัดทำในลักษณะค่ายกกำลังสองของค่าความคาดเคลื่อน(error term) : e_{t-1}^2 (the ARCH term)

(3) ความแปรปรวนที่พยากรณ์ได้ในอดีต (Last period's forecast variance: σ_{t-1}^2) (the GARCH term)

จากสมการที่ (29) เราสามารถขยายโดยเพิ่มตัวแปรภายนอก (exogenous variable) ที่มีอิทธิพลต่อผลตอบแทนในสมการ (28) ดังนั้นสมการความแปรปรวน คือ

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i-1}^{q} a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i-1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \gamma x_i \quad (30)$$