บทที่ 2

แนวคิด ทฤษฎี และผลงานการศึกษาที่เกี่ยวข้อง

2.1 แนวคิดและทฤษฎี

2.1.1 การวิเคราะห์อนุกรมเวลา (Time Series Analysis)

ในการศึกษาอนุกรมเวลาลักษณะอนุกรมเวลาลักษณะพื้นฐานของข้อมูลอนุกรมเวลาใดๆ มีข้อควรพิจารณาคือ ข้อมูลอนุกรมเวลานั้นๆเป็นข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีลักษณะนิ่งหรือไม่นิ่ง ข้อมูลอนุกรมเวลาที่สามารถนำไปพยากรณ์ได้จะต้องเป็นข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีลักษณะนิ่ง ดังนั้นต้องทำการทดสอบข้อมูลก่อนว่ามีลักษณะนิ่งหรือไม่โดยการทดสอบยูนิทรูท (Unit Root) ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

2.1.2 การทดสอบยูนิทรูท (Unit Root)

เนื่องจากการศึกษาในครั้งนี้ ข้อมูลทางเศรษฐกิจที่นำมาใช้เป็นข้อมูลอนุกรมเวลา(time series data) ซึ่งหากนำมาวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของข้อมูลโดยตรง โดยที่ไม่มีการตรวจสอบก่อน มักเกิดปัญหา ความไม่นิ่งของข้อมูล (non–stationary) กล่าวคือ ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนจะมีค่าไม่คงที่เปลี่ยนแปลงไปตามกาลเวลา ทำให้ผลที่ได้จากการนำข้อมูลไปคำนวณอาจผิดเพี้ยนไปได้ จึงเป็นการยากที่จะยอมรับได้ในทางเศรษฐศาสตร์ ดังนั้นจึงต้องทำการทดสอบก่อนว่าข้อมูลอนุกรมเวลามีลักษณะนิ่งหรือไม่ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1) กำหนดให้ $X_t, X_{t+1}, X_{t+2},\ldots, X_{t+k}$ เป็นข้อมูลอนุกรมเวลาที่เวลา t, t+1, t+2,…, t+k

2) กำหนดให้ $X_{t+m}, X_{t+m+1}, X_{t+m+2},\ldots, X_{t+m+k}$ เป็นข้อมูลอนุกรมเวลาที่เวลา t+m, t+m+1, t+m+2,…, t+m+k

3) กำหนดให้ $P(X_t, X_{t+1}, X_{t+2},\ldots, X_{t+k})$ เป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมของ $Z_t, Z_{t+1}, Z_{t+2},\ldots, Z_{t+k}$

4) กำหนดให้ $P(X_{t+m},X_{t+m+1},X_{t+m+2},\ldots,X_{t+m+k})$ เป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมของ $Z_{t+m}, Z_{t+m+1}, Z_{t+m+2},\ldots, Z_{t+m+k}$

จากข้อกำหนดทั้ง 4 ข้อมูลอนุกรมเวลาจะมีลักษณะนิ่งเมื่อ

$$P(X_t, X_{t+1}, X_{t+2},\ldots, X_{t+k}) = P(X_{t+m}, X_{t+m+1},X_{t+m+2},\ldots, X_{t+m+k})$$

ข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีคุณสมบัติสอดคล้องกับเงื่อนไขนี้เรียกว่า ข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีลักษณะนิ่งแบบเข้มงวด แต่ในทางปฏิบัตินิยมใช้ข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีลักษณะนิ่งแบบอ่อน กล่าวคือ X จะเป็นข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีลักษณะนิ่งแบบอ่อนเมื่อ

1) ค่าเฉลี่ย $E(X_i) = \mu$ = ค่าคงที่

2) ความแปรปรวน $V(X_i) = \sigma^2$ = ค่าคงที่

3) ความแปรปรวนร่วม $Cov(X_t, X_{t+k}) = E(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu) = \sigma_k - \mu$

การทดสอบว่าข้อมูลอนุกรมเวลามีลักษณะนิ่งหรือไม่นั้น เดิมจะพิจารณาที่ค่าสัมประสิทธิ์ในตัวเอง (Autocorrelation Coefficient Function:ACF) ตามแบบจำลองของ บ็อก-เจนกินส์ (Box-Jenkin Model) หากพบว่าค่า (correlation:ρ) ที่ได้จากการพิจารณามีค่าเข้าใกล้ 1 มากๆ จะส่งผลให้การพิจารณาที่ค่า ACF ค่อนข้างจะไม่แม่นยำ เพราะว่ากราฟแสดงค่า ACF มีค่าแนวโน้มลดลงเหมือนๆกัน ซึ่งแต่บางคนอาจจะสรุปได้ไม่เหมือนกันทั้งนี้ขึ้นอยู่กับประสบการณ์ ทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนได้ ดังนั้น Dickey-Fuller Test with GLS Detrending (DFGLS) จึงพัฒนาการตรวจสอบความนิ่งของข้อมูลอนุกรมเวลาโดยการทดสอบยูนิทรูท (unit root)

2.1.3 Dickey-Fuller Test with GLS Detrending (DFGLS)

เราสามารถที่จะเลือกรวมค่าคงที่ หรือ ค่าคงที่และแนวโน้มของเวลาที่เป็นรูปเส้นตรงในการทดสอบการถดถอยของ ADF โดยสองกรณีที่กล่าวมานี้ Elliott, Rothenberg, and Stock Point Optimal (1996) ได้เสนอการดัดแปลงของการทดสอบ ADF อย่างง่ายในกรณีที่ข้อมูลถูกเอาปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อแนวโน้มออก ดังนั้นตัวแปรอธิบายจึงถูกนำออกจากข้อมูลก่อนที่จะทดสอบการถดถอย

ERS กำหนดให้ quasi-difference ของ y_t ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าของ a แสดงถึง จุดตัวเลือกจำเพาะที่เราต้องการทดสอบ

$$d(y_t \mid a) = \begin{cases} y_t & t = 1 \\ y_t - a y_{t-1} & t > 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

ต่อมา พิจารณาการถดถอยแบบ OLS ของข้อมูลแบบ quasi-differenced $d(y_t \mid a)$ ต่อ quasi-differenced $d(\tau \mid a)$

$$d(y_t \mid a) = d(x_t \mid a)' \delta(a) + \eta_t \tag{2.2}$$

ซึ่ง x_t ประกอบด้วยค่าคงที่ หรือ ค่าคงที่และแนวโน้ม และให้ $\hat{\delta}(a)$ เป็นค่าประมาณของ OLS จากการถดถอยนี้ สิ่งที่ต้องการทราบคือ ค่าของ a ERS แนะนำให้ใช้ $a = \overline{a}$ ซึ่ง

$$a = \begin{cases} 1 - 7/T & x_t = \{1\} \\ 1 - 13.5/T & x_t = \{1, t\} \end{cases} \quad (2.3)$$

เราสามารถกำหนดข้อมูลที่เอาปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อแนวโน้มออก ของ GLS เป็น y_t^d โดยใช้ค่าประมาณที่สอดคล้องกับค่า $\overline{a}$ เป็น

$$y_t^d = y_t - \tau_t' \hat{\delta}(\overline{a}) \quad (2.4)$$

หลังจากนั้น การทดสอบ DFGLS เกี่ยวข้องกับการประมาณสมการการทดสอบ ADF แบบมาตรฐาน หลังจากนำค่า GLS ที่เอาปัจจัยที่มีผลต่อแนวโน้มออกแล้ว y_t^d ไปแทนกับค่าเดิม y_t

$$\Delta y_t^d = \alpha y_{t-1}^d + \beta_1 \Delta y_{t-1}^d + \mathrm{K} + \beta_p y_{t-p}^d + v_t \quad (2.5)$$

สังเกตว่า เมื่อ y_t^d ถูกเอาปัจจัยที่มีผลต่อแนวโน้มออกแล้วเราไม่รวมค่า x_t ในสมการการทดสอบ DFGLS

จากสมการที่ 2.5 จะได้สมมติฐานการทดสอบ คือ

$$H_0 : \alpha = 0$$

$$H_1 : \alpha < 0$$

ถ้ายอมรับ $H_0 : \alpha = 0$ หมายถึง y_t มียูนิทรูท หรือ y_t มีลักษณะไม่นิ่ง

ถ้ายอมรับ $H_1 : \alpha < 0$ หมายถึง y_t ไม่มียูนิทรูท หรือ y_t มีลักษณะนิ่ง

2.1.4 เทคนิคการวิเคราะห์พฤติกรรมความเสี่ยงหลักทรัพย์โดยวิธีมอนติคาโล

การกำหนดราคาหลักทรัพย์โดยวิธีมอนติคาโลที่จะกล่าวต่อไปนี้ จะทำโดยการให้ผู้วิเคราะห์ทราบถึงการกำหนดราคาโดยวิธีของผู้เป็นกลางต่อความเสี่ยง ซึ่งคิดลดกระแสเงินที่เขาคาดว่าจะได้รับในอนาคตจากการลงทุนในหลักทรัพย์นั้น ด้วยอัตราคิดลดสำหรับหลักทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง

การกำหนดราคาหลักทรัพย์ตามวิธีของผู้เป็นกลางต่อความเสี่ยง

ผู้เป็นกลางต่อความเสี่ยง (Risk-neutral investor) เป็นผู้ลงทุนที่ไม่ให้ความสำคัญต่อระดับความเสี่ยงของหลักทรัพย์ที่ตนเลือกลงทุน แต่จะเปรียบเทียบหลักทรัพย์จากระดับอัตราผลตอบแทนที่หลักทรัพย์แต่ละตัวเสนอ เมื่อเป็นเช่นนี้ถ้าในตลาดมีผู้ลงทุนทุกคนเป็นกลางต่อความเสี่ยง หลักทรัพย์ทุกตัวย่อมต้องเสนออัตราผลตอบแทนเท่ากับอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง (Risk-free return) ซึ่งเป็นอัตราคิดลดแบบสปอตของพันธบัตรที่กำหนดอัตราคูปองเป็นศูนย์นั่นเอง

ในโลกที่ผู้ลงทุนเป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk-neutral world) นี้ การกำหนดราคาหลักทรัพย์ทุกตัวสามารถทำได้โดยการประยุกต์วิธีคิดลดกระแสเงินที่ผู้ลงทุนซึ่งเป็นกลางต่อความเสี่ยงคาดว่าจะได้รับจากหลักทรัพย์นั้นทำการคิดลดด้วยอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง Harrison and Kreps (1979)

การกำหนดราคาในโลกที่ผู้ลงทุนเป็นกลางต่อความเสี่ยงนี้ สามารถให้ราคาหลักทรัพย์ในระดับเดียวกันกับราคาหลักทรัพย์ในโลกแห่งความเป็นจริง (real world) ที่หลักทรัพย์นั้นๆ มีการซื้อขายกันอยู่ Harrison and Pliska (1981)

ตัวแบบจำลองแบบเวลาต่อเนื่องเพื่อพรรณนาการเคลื่อนไหวของราคาหลักทรัพย์

กำหนดให้

S เป็นราคาหลักทรัพย์ที่ผู้วิเคราะห์สนใจ

dS เป็นขนาดของการเคลื่อนไหวของราคาหลักทรัพย์ในช่วงเวลา dt

dt เป็นช่วงเวลาที่สั้นมาก

จะตั้งเป็นสมมุติฐานให้เป็นไปตามกระบวนการของอิโต (Ito process)

$$dS = a(S,t)dt + b(S,t)dz \tag{2.6}$$

โดยที่

$a(S,t)$ เป็นฟังก์ชั่นซึ่งระบุค่าคาด $E(dS)$ ของขนาดการเปลี่ยนแปลง dS ของราคา ซึ่งก็คือ ผลตอบแทนจากหลักทรัพย์สำหรับการลงทุนเป็นช่วงเวลาสั้นๆ dt

dz เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการเคลื่อนไหวตามกระบวนการของวีเนีย (Wiener process)
$dz \sim N(0,dt)$

เมื่อกำหนดให้ dz เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติแล้ว ทำให้ทราบว่า ผลตอบแทน dS ตามสมการที่ (2.6) สำหรับการลงทุนช่วงเวลาสั้นๆ จะต้องมีการแจกแจงแบบปกติด้วย เพราะมีความสัมพันธ์ในเชิงเส้นตรงกับตัวแปร dz ผลตอบแทน dS จะมีความแปรปรวนเท่ากับ $\{b(S,t)\}^2 dt$ ผลนี้สามารถย้อนกลับใช้ไปอธิบายบทบาทของฟังก์ชั่น $b(S,t)$ ซึ่งอาจมีระดับ เปลี่ยนแปลงได้ขึ้นกับระดับราคา S ของหลักทรัพย์และจุดเวลาของ t ว่าเป็นฟังก์ชั่นเพื่อระบุขนาดของความผันผวนของผลตอบแทน dS ของหลักทรัพย์สำหรับช่วงเวลา dt ที่น่าลงทุน

โครงสร้างของฟังก์ชั่นที่กำหนดค่าที่คาดของผลตอบแทนของหลักทรัพย์

ฟังก์ชั่น $a(S,t)$ ซึ่งระบุขนาดของผลตอบแทนที่คาดสำหรับระยะเวลาการลงทุน dt สามารแยกได้เป็นสองส่วน ประกอบด้วย ผลตอบแทน Y บาทต่อช่วงเวลา dt ซึ่งผู้ลงทุนคาดว่าจะได้รับจากการใช้เงินลงทุน S บาท ไปลงทุนในหลักทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง สมมติให้อัตราผลตอบแทนที่ไม่มีความเสี่ยงเท่ากับร้อยละ y ต่อระยะเวลาการลงทุน dt ผลตอบแทนในส่วนที่เท่ากับ Y บาท นี้จะเท่ากับ yS บาท ส่วนผลตอบแทนส่วนที่เหลือจะเท่ากับ λ บาท ซึ่งเป็นผลต่างของผลตอบแทน $a(S,t)$ บาท จากหลักทรัพย์ และผลตอบแทน Y บาท จากหลักทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง เมื่อเป็นเช่นนี้ ผลตอบแทนที่คาด $a(S,t)$ จึงเท่ากับ

$$a(S,t) = Y + \lambda \tag{2.7}$$

เมื่อผลตอบแทน Y บาท เป็นผลตอบแทนจากการลงทุนที่ไม่มีความเสี่ยง ผลตอบแทน λ จึงพิจารณาได้ว่าเป็นผลตอบแทนส่วนเพิ่ม (risk premium) เพื่อชดเชยกับความเสี่ยงที่ผู้ลงทุนต้องแบกรับจากการลงทุนในหลักทรัพย์ซึ่งมีความเสี่ยง ซึ่งผู้ลงทุนพึงสังเกตว่า ผลตอบแทน Y บาท ในส่วนที่มาจากผลตอบแทนจากการลงทุนที่ไม่มีความเสี่ยง ย่อมมีค่าเท่ากันและมีค่าเท่ากับ Y บาท เพราะเป็นผลลัพธ์ของการคิดลดผลตอบแทนจากอัตราคิดลดของพันธะบัตรร้อยละ y ต่อการลงทุนเป็นเวลา dt ที่เท่ากันในทุกโลกนั่นเอง แต่ค่าชดเชยความเสี่ยง λ ของหลักทรัพย์ในแต่ละโลกย่อมแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับผู้ลงทุนในโลกแห่งนั้น ว่าจะมีพฤติกรรมความเสี่ยงอย่างไร

เพื่อให้เห็นภาพ สมมติให้ผู้วิเคราะห์สนใจในหลักทรัพย์สองตัว ซึ่งมีราคา f บาท และ g บาท ซึ่งมีการเคลื่อนไหวแบบบราวเนียนเชิงเรขาคณิต (Geometric Brownian Motion) ตามที่ Black and Scholes (1973) ใช้

$$df = \mu_f f dt + \sigma_f f dz \tag{2.8.1}$$

$$dg = \mu_g g dt + \sigma_g g dz \tag{2.8.2}$$

โดยที่

$\mu_f f$ และ $\mu_g g$ เป็นค่าที่คาดสำหรับผลตอบแทนจากการลงทุนในหลักทรัพย์ทั้งสองต่อเวลา dt

$\sigma_f f$ และ $\sigma_f g$ มีค่าเป็นบวก ใช้ในการพรรณนาขนาดความแปรปรวน

สังเกตว่า แหล่งที่มาของความเสี่ยงของหลักทรัพย์ในสมการที่ (2.8.1) และ (2.8.2) ได้รับการกำหนดให้มาจากแหล่งเดียวกัน ผ่านพฤติกรรมความเสี่ยงของตัวแปร $dz \sim N(0,dt)$

ต่อไปให้ผู้วิเคราะห์สร้างกลุ่มหลักทรัพย์ ประกอบด้วยการลงทุนในฐานะซื้อ จำนวน $\mu_g g$ บาท ในหลักทรัพย์ f และลงทุนในฐานะขายชอร์ตจำนวน $\sigma_f f$ บาท ในหลักทรัพย์ g เงิน

ลงทุนที่ผู้วิเคราะห์จะต้องใช้เท่ากับ π บาท โดยที่ π มีค่าเท่ากับ $\sigma_g gf - \sigma_f fg$ และมีผลตอบแทน $d\pi$ บาทต่องวดเวลา dt เท่ากับ

$$d\pi = \sigma_g gdf - \sigma_f fdg \tag{2.9.1}$$

$$d\pi = \sigma_g g(\mu_f fdt + \sigma_f fdz) - \sigma_f f(\mu_g gdt + \sigma_g gdz) \tag{2.9.2}$$

$$d\pi = (\sigma_g g\mu_f f - \sigma_f fg)dt \tag{2.9.3}$$

สมการที่ (2.9.1) ชี้ว่า ผลตอบแทน $d\pi$ ของกลุ่มหลักทรัพย์ ย่อมต้องเท่ากับผลตอบแทนที่เกิดจากการลงทุนในหลักทรัพย์ f ที่ได้จำนวน $\sigma_g gdf$ บาท รวมกับผลตอบแทนในหารลงทุนในหลักทรัพย์ g ที่ได้จำนวน $-\sigma_f fdg$ บาท สมการที่ (2.9.2) ใช้พฤติกรรมการเคลื่อนไหวของราคาหลักทรัพย์ f และ g จากกลุ่มสมการที่ (2.8) มาขยายความโครงสร้างของกลุ่มหลักทรัพย์ ส่วนสมการที่ (2.9.3) เป็นการสรุปผลการลงทุนในขั้นสุดท้าย ซึ่งพบว่าการลงทุนโดยใช้กลยุทธ์นี้ได้กลุ่มหลักทรัพย์ π ซึ่งเป็นกลุ่มหลักทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยงเพราะจากสมการที่ (2.9.3) การลงทุนนั้นได้จัดสรรน้ำหนักให้ความเสี่ยงจากหลักทรัพย์ f และ g ขจัดกันเองจนหมดสิ้นไป ไม่มีพจน์ dz ซึ่งเป็นแหล่งความเสี่ยงปรากฏให้เห็น

เมื่อการลงทุนในหลักทรัพย์ π เป็นการลงทุนที่ปราศจากความเสี่ยงผลตอบแทน $d\pi$ ย่อมต้องเท่ากับผลตอบแทนในการลงทุนในหลักทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงด้วย มิฉะนั้น ผู้ลงทุนในตลาดแห่งนี้จะสามารถสร้างกลยุทธ์เพื่อทำกำไรแบบอาบิทราจได้ เมื่อกลุ่มหลักทรัพย์ π ใช้เงินลงทุน $\sigma_g gf - \sigma_f fg$ บาท และถ้ากำหนดต่อไปให้อัตราผลตอบแทนจากการลงทุนที่ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับร้อยละ y ต่อระยะเวลาการลงทุน dt ผลตอบแทน $d\pi$ ในสมการที่ (2.9.3) ย่อมต้องเท่ากับ

$$d\pi = y(\sigma_g gf - \sigma_f fg)dt \tag{2.10}$$

เมื่อผู้วิเคราะห์ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างสมการที่ (2.9.3) และ (2.10) แล้วนำมาจัดรูปเสียใหม่ จะได้ความสัมพันธ์

$$\frac{\mu_f - y}{\sigma_f} = \frac{\mu_g - y}{\sigma_g} \tag{2.11}$$

ซึ่งเป็นค่าคงที่ และถ้าผู้วิเคราะห์กำหนดให้ค่าคงที่คู่นี้ในสมการที่ (2.11) มีค่าเท่ากับ λ_{dz} สำหรับหลักทรัพย์ f และ g ทุกหลักทรัพย์ที่มีแหล่งที่มาของความเสี่ยงจาก dz ร่วมกัน ค่า λ_{dz} สามารถนิยามได้ว่าเป็น ราคาตลาดของความเสี่ยง (market price of risk) เพราะสำหรับหลักทรัพย์ f ใดๆ ที่มีแหล่งที่มาของความเสี่ยงเป็น dz และจะได้ความสัมพันธ์

$$\mu_f = y + \sigma_f \lambda_{dz} \tag{2.12}$$

โดยที่ μ_f เป็นอัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในหลักทรัพย์ f ซึ่งมีความเสี่ยงจำนวน σ_f หน่วยจากแหล่ง dz และ y เป็นอัตราผลตอบแทนที่ไม่มีความเสี่ยง ส่งผลให้ $\sigma_f \lambda_{dz}$ สามารถตีความได้ว่าเป็นอัตราผลตอบแทนเพื่อชดเชยกับการแบกรับความเสี่ยงจำนวน σ_f หน่วย โดยความเสี่ยงแต่ละหน่วยมีราคา λ_{dz} นั่นเอง

สมการที่ (2.12) เป็นการกำหนดผลตอบแทนและอัตราผลตอบแทนให้แก่ผู้ลงทุนในโลกแห่งความเป็นจริงที่ว่า ผู้ลงทุนต้องการค่าชดเชยความเสี่ยงที่คำนวณได้จากขนาดของความเสี่ยง σ_f ที่ตนแบบรับ และราคาตลาดของความเสี่ยง ซึ่งในที่นี้กำหนดให้เท่ากันและเท่ากับ λ_{dz} สำหรับทุกหลักทรัพย์ที่มีแหล่งที่มาของความเสี่ยง dz เดียวกัน

ราคาตลาดของความเสี่ยง λ_{dz} จะแตกต่างกันไป ขึ้นกับว่าหลักทรัพย์ที่กำลังพิจารณาจะมีการซื้อขายกันในโลกแห่งความเป็นจริงหรือในโลกอื่น การวิเคราะห์ข้างต้นชี้ว่า ในโลกแห่งความเป็นจริงราคาตลาดของความเสี่ยงต้องมีค่าตามที่พรรณนาไว้ในสมการที่ (2.11) แต่ในกรณีที่หลักทรัพย์มีการซื้อขายในโลกที่ผู้ลงทุนทุกคนเป็นผู้ที่เป็นกลางต่อความเสี่ยง ไม่ได้ให้ความสนใจต่อระดับความเสี่ยงของหลักทรัพย์ใดๆ ราคาตลาด λ_{dz} ของความเสี่ยงย่อมต้องมีค่าเป็นศูนย์ (Hull, 2000) และถ้าการซื้อขายทำในโลกอื่น นอกเหนือจากสองโลกที่กล่าวไปแล้วข้างต้น ราคาตลาดของความเสี่ยงจะเท่ากับ λ^*_{dz} ซึ่งอาจมีค่าเป็นอื่นที่ต่างออกไปอีก

โครงสร้างของฟังก์ชั่นที่กำหนดค่าความแปรปรวนของผลตอบแทนจากหลักทรัพย์

การวิเคราะห์โครงสร้างของผลตอบแทนที่คาดของหลักทรัพย์ข้างต้นชี้ว่าระดับของผลตอบแทนที่คาดย่อมขึ้นกับหลักทรัพย์นั้นว่าได้ถูกนำไปซื้อขายในโลกแห่งใด โดยระดับของผลตอบแทนที่คาดซึ่งจะแตกต่างกันไปเกิดจากพฤติกรรมความเสี่ยงของผู้ลงทุนในแต่ละโลกที่แตกต่างกัน ได้กำหนดให้ราคาตลาดของความเสี่ยงมีระดับไม่เท่ากัน ประเด็นปัญหาสำคัญต่อมาจึง

อยู่ที่ค่าความแปรปรวนซึ่งกำหนดผ่านฟังชั่น $b(S,t)$ นี้ว่าจะขึ้นกับโลกที่หลักทรัพย์ได้มีการซื้อขายกันด้วยหรือไม่อย่างไร

ในการวิเคราะห์ประเด็นปัญหาข้อนี้ ผู้วิเคราะห์สามารถใช้ ทฤษฎีบทของ Girsanov (Girsanov's Theorem) มาปรับตัวแบบจำลองในสมการที่ (2.6) เสียใหม่ การปรับสมการที่ (2.6) ตามทฤษฎีบททำให้ฟังก์ชั่น $a(S,t)$ สะท้องถึงผลตอบแทนที่คาดจากหลักทรัพย์ซึ่งปรับเปลี่ยนไปโลกที่หลักทรัพย์มีการซื้อขาย แต่ยังได้ฟังก์ชั่นเพื่อพรรณนาความแปรปรวนของผลตอบแทนกับฟังก์ชั่น $b(S,t)$ ดังเดิม

เพื่อให้ผู้วิเคราะห์ได้เห็นภาพ การพัฒนาผลลัพธ์จะทำตาม Sundaram (1997) โดยจะเปลี่ยนฟังก์ชั่น $a(S,t)$ ที่กำหนดค่าที่คาดขอองผลตอบแทน ds ในโลกแห่งหนึ่ง ไปเป็นฟังก์ชั่น $\hat{a}(S,t)$ ที่กำหนดค่าที่คาดของผลตอบแทน ds ในโลกอื่น

ก่อนอื่นให้นิยาม

$$a(S,t)-\hat{a}(S,t)=b(S,t)\gamma \tag{2.13}$$

และนิยามตัวแปร $d\hat{z}$ ซึ่งมีพฤติกรรมเชิงสุ่มตามตามกระบวนการ

$$d\hat{z}=\gamma dt+b(S,t)dz \tag{2.14}$$

สุดท้าย นิยาม ผลตอบแทน $d\hat{S}$ ของหลักทรัพย์ $\hat{S}$ ในโลกอื่นที่ผู้วิเคราะห์สนใจจะกำหนดให้มีค่าที่คาดเป็น $\hat{a}(S,t)$ ว่าเป็น

$$d\hat{S}=\hat{a}(S,t)dt+b(S,t)d\hat{z} \tag{2.15}$$

เมื่อแทนค่า $\hat{a}(S,t)$ และ $d\hat{z}$ จากสมการที่ (2.13) และ (2.14) เข้าไปในสมการที่ (2.15) และจัดรูปสมการเสียใหม่แล้ว จะได้ $d\hat{S}=dS$

$$dS=\hat{a}(S,t)dt+b(S,t)d\hat{z} \tag{2.16}$$

แต่ผู้วิเคราะห์ยังต้องตระหนักว่า กระบวนการเพื่อพรรณนาผลตอบแทน dS ของหลักทรัพย์ S มีฟังก์ชั่นเพื่อกำหนดค่าที่คาด $\hat{a}(S,t)$ และมีฟังก์ชั่น $b(S,t)$ เพื่อกำหนดค่าความแปรปรวน จะต้องเป็นกระบวนการที่อยู่ในโลกที่สอดคล้องกับการกำหนดค่าที่คาดด้วยฟังก์ชั่น $\hat{a}(S,t)$ เท่านั้น ไม่ใช่โลกเดิมอีกต่อไป

เงื่อนไขซึ่งกำหนดราคาโดยเปรียบเทียบของหลักทรัพย์ให้มีคุณสมบัติมาร์ติงเกล

การวิเคราะห์ที่จะทำในส่วนต่อไปจะศึกษาพฤติกรรมของราคาโดยเปรียบเทียบ $\frac{f}{g}$ ของหลักทรัพย์ f และ g และเพื่อให้การวิเคราะห์เป็นไปโดยเรียบง่าย ต่อเนื่อง และนำไปประยุกต์ใช้ได้กับการกำหนดราคาและการวิเคราะห์พฤติกรรมความเสี่ยงที่แพร่หลายในปัจจุบัน การวิเคราะห์จะตั้งสมมติฐานให้ราคาของหลักทรัพย์ f และ g มีพฤติกรรมซึ่งพรรณนาได้ดังกลุ่มสมการที่ (2.8) การปรับเปลี่ยนเงื่อนไขที่พรรณนาพฤติกรรมของราคาหลักทรัพย์ให้เป็นรูปแบบอื่นสามารถทำได้อย่างตรงไปตรงมาและได้ผลลัพธ์เดียวกันในเชิงคุณภาพ

การวิเคราะห์สนใจเงื่อนไขที่จะทำให้ราคาโดยเปรียบเทียบ $\frac{f}{g}$ มีคุณสมบัติเป็นมาร์ติงเกล (martingale) ทำให้ทราบว่า ถ้าราคาโดยเปรียบเทียบ $\frac{f}{g}$ เป็นมาร์ติงเกลแล้ว จะได้ระดับราคาโดยเปรียบเทียบ $\frac{f_0}{g_0}$ ในวันนี้มีค่าที่คาด $E\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$ สำหรับราคาโดยเปรียบเทียบที่จะเกิดขึ้นสำหรับวันที่ T ในอนาคต กล่าวคือ

$$\frac{f_0}{g_0} = E\left(\frac{f_T}{g_T}\right) \tag{2.17}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างราคาหลักทรัพย์ f และ g ตามสมการที่ (2.17) นี้มีประโยชน์มาก เพราะทำให้ผู้วิเคราะห์สามารถระบุราคา f_0 ของหลักทรัพย์ f โดยใช้ราคา g_0 ของหลักทรัพย์ g ในวันนี้ควบคู่กับการคาดการณ์เกี่ยวกับราคาโดยเปรียบเทียบของหลักทรัพย์ทั้งคู่ ซึ่งการกำหนดราคาโดยวิธีนี้จะทำได้ง่ายกว่าการกำหนดราคา f_0 โดยตรง

ในโลกแห่งความเป็นจริง ราคาโดยเปรียบเทียบ $\frac{f_0}{g_0}$ จะไม่เป็นมาร์ติงเกล การวิเคราะห์จึงต้องเสาะหาต่อไปว่า ในโลกแห่งใดบ้างที่จะมีราคาโดยเปรียบเทียบของหลักทรัพย์คู่นี้เป็นมาร์ติงเกล สังเกตว่า ค่าที่คาด μ_f และ μ_g ในกลุ่มสมการที่ (2.8) สามารถเขียนใหม่โดยแยกส่วนประกอบได้เป็นผลรวมของผลตอบแทน y จากการลงทุนที่ปราศจากความเสี่ยง และผลตอบแทน $\sigma_f \lambda_{dz}$ และ $\sigma_g \lambda_{dz}$ เพื่อเป็นค่าชดเชยแก่ผู้ลงทุนที่ยอมรับความเสี่ยง

ต่อไปให้ผู้วิเคราะห์สนใจพฤติกรรมราคาของหลักทรัพย์ f และ g ในโลกอื่นที่กำหนดราคาตลาดของความเสี่ยง λ_{dz} ให้เท่ากับ σ_g กล่าวคือ $\lambda_{dz} = \sigma_g$ ในโลกแห่งนี้ พฤติกรรมการเคลื่อนไหวของราคาสามารถพรรณนาได้โดยกลุ่มสมการที่ (2.18)

$$df = \left(y + \sigma_f \sigma_g\right) f dt + \sigma_f f dz \qquad (2.18.1)$$
$$dg = \left(y + \sigma_g^2\right) g dt + \sigma_g dz \qquad (2.18.2)$$

ผู้วิเคราะห์พึงสังเกตว่า แม้ค่าที่คาด μ_f และ μ_g ของหลักทรัพย์ f และ g จะเปลี่ยนไปจากระดับที่เป็นอยู่ในโลกแห่งความเป็นจริง ไปเป็น $\left(y + \sigma_f \sigma_g\right)$ และ $\left(y + \sigma_g^2\right)$ แล้ว แต่ฟังก์ชั่นที่กำหนดค่าความแปรปรวนของหลักทรัพย์ยังคงอยู่ในระดับเดิมเท่ากับ $\sigma_f f$ และ $\sigma_g g$ ตามทฤษฎีของ Girsanov

การวิเคราะห์สนใจฟังก์ชั่น $\ln(f)$ และ $\ln(g)$ ของระดับราคาว่าจะมีการเปลี่ยนแปลง $d\ln(f)$ และ $d\ln(g)$ เป็นอย่างไร ฟังก์ชั่น ln ของราคามีความสำคัญต่อการวิเคราะห์ราคาหลักทรัพย์ เพราะขนาดการเปลี่ยนแปลง $d\ln(f)$ ของฟังก์ชั่นสำหรับราคาหลักทรัพย์ f ใดๆ จะมีค่าเท่ากับ $d\ln(f) = \frac{df}{f}$ ซึ่งเป็นอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ f สำหรับการลงทุนแบบเวลาต่อเนื่องเป็นเวลาสั้นๆขนาด dt การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชั่นของตัวแปรต้องใช้เล็มม่าของอิโต้ (Ito's lemma)

การวิเคราะห์พบว่า

$$d\ln(f) = \left(y + \sigma_g \sigma_f - \frac{\sigma_f^2}{2}\right) dt + \sigma_f dz \qquad (2.19.1)$$

$$d\ln(g)=\left(y-\frac{\sigma_g^2}{2}\right)dt+\sigma_g dz \tag{2.19.2}$$

ส่งผลให้

$$d\ln\left(\frac{f}{g}\right)=-\frac{(\sigma_f-\sigma_g)^2}{2}dt+(\sigma_f-\sigma_g)dz \tag{2.20}$$

จากนั้นถ้าผู้วิเคราะห์พิจารณาสมการที่ (2.20) ย้อนกลับไปให้คืนรูปเป็น $d\left(\frac{f}{g}\right)$ จะได้

$$d\left(\frac{f}{g}\right)=(\sigma_f-\sigma_g)\frac{f}{g}dz \tag{2.21}$$

ซึ่งชี้ว่าตัวแปรราคาโดยเปรียบเทียบ $\frac{f}{g}$ เป็นมาร์ติงเกลทำให้ผู้วิเคราะห์เขียนความสัมพันธ์ของราคาโดยเปรียบเทียบได้ว่า

$$\frac{f_0}{g_0}=E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right) \tag{2.22}$$

โดยสมการที่ (2.22) มีลักษณะเฉพาะเจาะจงซึ่งแตกต่างจากสมการที่ (2.17) ข้างต้นคือที่การคาดการณ์เป็นการคาดการณ์ $E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$ ในโลกที่ผู้ลงทุนกำหนดราคาตลาดของความเสี่ยงให้เท่ากับ σ_g ไม่ใช่ การคาดการณ์ $E\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$ ในโลกแห่งความเป็นจริงที่ผู้ลงทุนกำหนดราคาตลาดของความเสี่ยงเป็น $\frac{\mu_f-y}{\sigma_f}=\frac{\mu_g-y}{\sigma_g}$

วงวิชาการเรียกโลกซึ่งกำหนดราคาของหลักทรัพย์ f ใดๆ ที่กำหนดราคาหลักทรัพย์ผ่านการกำหนดราคาของตลาดของความเสี่ยงเสียใหม่ให้มีค่าเท่ากับ σ_g ว่าเป็น โลกซึ่งเป็นกลางต่อความเสี่ยง เมื่อเทียบกับหลักทรัพย์ g (forward risk neutral with respect to g) อนึ่ง ราคาของ f_0

g_0 และราคาโดยเปรียบเทียบ $\dfrac{f_0}{g_0}$ ที่กำหนดได้ตามสมการที่ (2.22) ในโลกที่ผู้ลงทุนกำหนดราคาตลาดของความเสี่ยงเป็น σ_g จะต้องเท่ากับราคา f_0 และ g_0 ของหลักทรัพย์ f และ g ในโลกแห่งความเป็นจริงด้วย ตามผลลัพธ์ของ Harrison and Kreps (1979) และ Harrison and Pliska (1981) มิฉะนั้นตลาดจะเปิดโอกาสให้ผู้ลงทุนสามารถทำกำไรแบบอาบิทราจได้

การประยุกต์ใช้คุณสมบัติมาร์ติงเกลของราคาโดยเปรียบเทียบเพื่อกำหนดราคาหลักทรัพย์ตามวิธีของผู้เป็นกลางต่อความเสี่ยง

ผู้วิเคราะห์สามารถใช้ความสัมพันธ์ของราคาโดยเปรียบเทียบตามสมการ (2.22) ไปกำหนดราคา f_0 บาท ของหลักทรัพย์ f ใดๆ โดยใช้วิธีของผู้เป็นกลางต่อความเสี่ยง ทั้งนี้ ผู้วิเคราะห์ต้องตั้งข้อสังเกตสำคัญสองข้อ คือ

ข้อแรก สมมติให้หลักทรัพย์ g เป็นพันธบัตรซึ่งกำหนดคูปองเป็นศูนย์มีอายุคงเหลือ T วัน และมีราคาที่ตรา 1 บาท ผู้วิเคราะห์จะทราบทันทีว่า ราคาของพันธบัตร ณ วันที่ T เมื่อครบกำหนดไถ่คืน จะต้องมีค่าเท่ากับราคาที่ตรา $g_T = 1$ บาท ส่วนราคาของหลักทรัพย์ g_0 ในวันนี้ต้องเท่ากับ $g_0 = \exp(-yT)$ บาท โดยที่ y เป็นอัตราคิดลดสำหรับพันธบัตร และอัตราคิดลดร้อยละ y ต้องเป็นอัตราเดียวกันในโลกแห่งความเป็นจริงและในโลกที่ผู้ลงทุนเป็นกลางต่อความเสี่ยง จากสมการที่ (2.22) ข้างต้น ทำให้ผู้วิเคราะห์ทราบว่า ราคาของหลักทรัพย์ f ซึ่งเท่ากับ f_0 บาทในวันนี้ต้องมีค่าเท่ากับ

$$f_0 = \exp(-yT)E_{RN}(f_T) \tag{2.23}$$

โดยที่การคาดการณ์ $E_{RN}(f_T)$ ในที่นี้เปลี่ยนจากการคาดการณ์ในโลกที่ผู้ลงทุนกำหนดราคาตลาดของความเสี่ยงเท่ากับ σ_g ไปเป็นโลกที่ผู้ลงทุนทุกคนเป็นกลางต่อความเสี่ยง

ข้อสอง เมื่อผู้ลงทุนทุกคนในตลาดเป็นผู้ที่เป็นกลางต่อความเสี่ยง การเคลื่อนไหวของราคาของหลักทรัพย์ f ต้องเป็นไปให้สอดคล้อง โดยในโลกที่ผู้ลงทุนเป็นกลางต่อความเสี่ยงนี้ ราคาตลาดของความเสี่ยงจะต้องเท่ากับ 0.00 เสมอ เพราะมามีผู้ลงทุนคนใดให้ความสำคัญต่อความเสี่ยง

เมื่อเป็นเช่นนี้การเคลื่อนไหวของราคาหลักทรัพย์ f ในโลกที่ผู้ลงทุนเป็นกลางต่อความเสี่ยงจะต้องเป็นไปตามสมการที่ (2.24)

$$df = yfdt + \sigma_f fdz \tag{2.24}$$

ส่วนอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ f ใดๆ ต่อการลงทุนเป็นเวลา dt ตามที่ได้เคยวิเคราะห์ไปก่อนหน้า และได้ผลลัพธ์ดังสมการที่ (2.19.2) จะต้องเท่ากับ

$$d\ln(f) = \left(y - \frac{\sigma_f^2}{2}\right)dt + \sigma_f fdz \tag{2.25}$$

การคาดการณ์ $E_{RN}(f_T)$ สำหรับราคา f_T ของหลักทรัพย์ f ในอนาคต ณ เวลาที่ T โดยผู้ลงทุนในโลกที่เป็นกลางต่อความเสี่ยงนี้ต้องอาศัยการเคลื่อนไหวของราคาและอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ f ตามสมการที่ (2.24) และ (2.25) ข้างต้น

เมื่อถึงจุดนี้ ผู้วิเคราะห์สามารถสรุปได้ว่า ราคา f_0 ของหลักทรัพย์ f ซึ่งกำหนดในโลกซึ่งผู้ลงทุนเป็นกลางต่อความเสี่ยง ตามสมการที่ (2.23) ต้องเป็นราคา f_0 ของหลักทรัพย์ f ในโลกแห่งความเป็นจริงด้วย แต่ราคา f_0 กลับไปขึ้นกับการคาดการณ์ $E_{RN}(f_T)$ ของราคาหลักทรัพย์ในอนาคต โดยราคามีการเคลื่อนไหวตามสมการที่ (2.24) และ (2.25) ประเด็นปัญหาสำคัญที่ผู้วิเคราะห์จะต้องตอบในส่วนต่อไปจึงอยู่ที่ผู้วิเคราะห์จะใช้ข้อความจริงที่มีอยู่เหล่านี้ไประบุค่าที่คาด $E_{RN}(f_T)$ สำหรับราคา f_T ในอนาคต โดยผู้ลงทุนผู้เป็นกลางต่อความเสี่ยงได้อย่างไร

การใช้วิธีมอนติคาโลเพื่อระบุราคาของหลักทรัพย์ที่อาจเป็นไปได้ในอนาคต

ผู้วิเคราะห์พึงสังเกตว่า การพัฒนาการเคลื่อนไหวของราคาหลักทรัพย์ f ใดๆ ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นสมการที่ (2.24) และ (2.25) เป็นการพัฒนาภายใต้กรอบตัวแบบจำลองแบบเวลาต่อเนื่อง ซึ่งไม่สามารถทำได้จริงในทางปฏิบัติ เมื่อผู้วิเคราะห์ทำงานจริง ผู้วิเคราะห์จะต้องทำการตรวจสอบข้อมูลตามจุดของเวลาเป็นช่วง ไม่ใช่เวลาแบบต่อเนื่อง เมื่อเป็นเช่นนี้ ผู้วิเคราะห์จึงจำเป็นต้องปรับตัวแบบตามสมการที่ (2.24) และ (2.25) ที่เป็นแบบเวลาต่อเนื่อง ให้เป็นตัวแบบจำลองแบบ

เวลาเป็นช่วง จะได้สอดคล้องกับที่ตนจะนำไปปฏิบัติจริงได้ ตัวแบบจำลองแบบเวลาเป็นช่วงที่สอดคล้องกับตัวแบบจำลองแบบต่อเนื่องสามารถเขียนได้เป็น

$$\Delta f = yf\Delta t + \sigma_f f\sqrt{\Delta t}\varepsilon \tag{2.26.1}$$

$$r = \left(y - \frac{\sigma_f^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_f\sqrt{\Delta t}\varepsilon \tag{2.26.2}$$

โดยที่ Δt เป็นขนาดของช่วงเวลา ซึ่งผู้วิเคราะห์ใช้นับงวดสำหรับการลงทุน เช่น Δt อาจเท่ากับ 1 วัน 1 สัปดาห์ หรือ 1 เดือน เป็นต้น ส่วน ε เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติมาตรฐาน กล่าวคือ $\varepsilon \sim N(0,1)$ เมื่อผู้วิเคราะห์กำหนด $\Delta t = 1$ คือ 1 หน่วยของเวลาที่ใช้นับงวด และเมื่อผู้วิเคราะห์สุ่มค่า ε ขึ้นมาเรื่อยๆ ได้ ε_1 โดย t = 1 2 ... T สำหรับคำนวณราคา ณ วันที่ t = 1 2 ... T จะได้

$$f_1 = \exp(r_1)f_0 \tag{2.27.1}$$

$$= \exp\left\{\left(y - \frac{\sigma_f^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_f\sqrt{\Delta t}\varepsilon_1\right\}f_0 \tag{2.27.2}$$

และ

$$f_2 = \exp\left\{\left(y - \frac{\sigma_f^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_f\sqrt{\Delta t}\varepsilon_2\right\}f_1 \tag{2.27.3}$$

เมื่อแทนค่าต่อไปเรื่อยๆ จะได้

$$f_T = \exp\left\{\left(y - \frac{\sigma_f^2}{2}\right)T + \sigma_f\sqrt{T}\varepsilon\right\}f_0 \tag{2.28}$$

สมการที่ (2.27.1) เป็นการคำนวณราคา f_1 ของหลักทรัพย์ f สำหรับงวดเวลาถัดไปที่ปรับตัวเพิ่มขึ้น ด้วยอัตราผลตอบแทนร้อยละ r ต่อช่วงเวลา Δt อัตราผลตอบแทนนี้เป็นอัตรา

ผลตอบแทนเชิงสุ่ม มีค่าไม่แน่นอน แต่มีค่าที่คาดเท่ากับ $y-\dfrac{\sigma_f^2}{2}$ และมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ σ_f^2 สมการที่ (2.27.2) เป็นการขยายความค่าของอัตราผลตอบแทน r ด้วยโครงสร้างในสมการที่ (2.26.2) ส่วนสมการที่ (2.27.3) เป็นการระบุค่า f_2 ในงวดเวลาถัดไปจาก f_1 ในงวดก่อนด้วยวิธีการเดียวกัน สุดท้าย ผลลัพธ์ซึ่งเป็นราคา f_T นั้นอาศัยข้อความจริงที่ราคา f_T บาท เป็นราคาของหลักทรัพย์ที่เกิดจากการลงทุนโดยได้รับอัตราผลตอบแทนร้อยละ r ต่องวด เป็นจำนวน T งวด อัตราผลตอบแทนที่คาดของอัตราผลตอบแทนรวม T งวดนี้ จึงต้องมีค่าที่คาดร้อยละ $\left(y-\dfrac{\sigma_f^2}{2}\right)T$ และมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ $\sigma_f^2 T$ อัตราผลตอบแทน $r(T)$ ของการลงทุน T งวด จึงสามารถพรรณนาได้โดย $r(T)=\left(y-\dfrac{\sigma_f^2}{2}\right)T+\sigma_f\sqrt{T}\varepsilon$ และ ε เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติมาตรฐาน

ผู้วิเคราะห์พึงสังเกตสมการที่ (2.28) ว่า ราคา f_T ของหลักทรัพย์ f ณ เวลาที่ T เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม เพราะระดับราคา f_T ขึ้นกับค่า ε ที่จะเกิดขึ้นจริง กล่าวคือ

ถ้า $\varepsilon=\varepsilon_1$ จะได้ $f_T(\varepsilon_1)=\exp\left\{\left(y-\dfrac{\sigma_f^2}{2}\right)T+\sigma_f\sqrt{T}\varepsilon_1\right\}f_0$

ถ้า $\varepsilon=\varepsilon_2$ จะได้ $f_T(\varepsilon_2)=\exp\left\{\left(y-\dfrac{\sigma_f^2}{2}\right)T+\sigma_f\sqrt{T}\varepsilon_2\right\}f_0$

. . .

. . .

. . .

ถ้า $\varepsilon=\varepsilon_N$ จะได้ $f_T(\varepsilon_N)=\exp\left\{\left(y-\dfrac{\sigma_f^2}{2}\right)T+\sigma_f\sqrt{T}\varepsilon_N\right\}f_0$

แต่เนื่องจากผู้วิเคราะห์ทราบพฤติกรรมของตัวแปร ε ว่ามีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน ค่า ε_i เมื่อ i = 1 2 ... N จึงอาจพิจารณาได้ว่าเป็นค่าของตัวแปร ε ที่ผู้วิเคราะห์สุ่มขึ้นมาได้จากการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน และวิธีมอนติคาโลจะใช้เป็นวิธีซึ่งสุ่มค่า ε_i จากการแจกแจงแบบปกติ

มาตรฐานขึ้นมาเป็นจำนวนมาก เพื่อที่จะสร้างราคาในอนาคต $f_T(\varepsilon_i)$ ขึ้นมาเป็นจำนวนมากภายใต้สถานการณ์ทั้งหลายที่อาจเกิดขึ้นจริงตามค่าของ ε_i ที่สุ่มขึ้นมาได้เหล่านั้น

การระบุค่าที่คาดของราคาหลักทรัพย์ในอนาคต

กำหนดให้ $\bar{f}_T$ เป็นค่าเฉลี่ยของ $f_T(\varepsilon_i)$ ที่คำนวณได้จากค่า ε ที่สุ่มขึ้นมาได้เป็นจำนวน N ค่า

$$\bar{f}_T = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_T(\varepsilon_i) \tag{2.29.1}$$

จะได้

$$\lim_{N\to\infty} \bar{f}_T = E_{RN}(f_T) \tag{2.29.2}$$

ทั้งนี้ สมการที่ (2.29.2) เป็นผลลัพธ์ทางสถิติที่ค่าเฉลี่ยของตัวแปรย่อมต้องเท่ากับค่าที่คาดของตัวแปรนั้นหากการสุ่มตัวอย่างได้ทำเป็นจำนวนครั้งมากพอ แต่สมการที่ (2.29.2) มีความพิเศษเพิ่มเติมที่ ค่าที่คาดของราคานี้เป็นค่าที่คาดของผู้ลงทุนซึ่งเป็นกลางต่อความเสี่ยง เพราะราคา f_T ซึ่งเกิดขึ้นภายใต้สถานการณ์ต่างๆ ที่ใช้ในการคำนวณ เป็นราคาที่เกิดจากการเคลื่อนไหวของราคาหลักทรัพย์ตามกลุ่มสมการที่ (2.24) (2.25) และ (2.26) ซึ่งเกิดเฉพาะในโลกที่ผู้ลงทุนเป็นกลางต่อความเสี่ยง

เมื่อการพัฒนาตัวแบบจำลองเพื่อกำหนดราคาหลักทรัพย์โดยวิธีของผู้ลงทุนซึ่งเป็นกลางต่อความเสี่ยงทำมาถึงจุดนี้ จะได้ราคาของหลักทรัพย์ f_0 วันนี้เท่ากับ

$$f_0 = \lim_{N\to\infty} \exp(-yT)\bar{f}_T \tag{2.30}$$

ในทางปฏิบัติ การกำหนดให้การสุ่มตัวอย่าง N เป็นจำนวน 10000 ครั้ง ถือว่ามากพอและยอมรับได้

การวิเคราะห์พฤติกรรมความเสี่ยงของหลักทรัพย์โดยวิธีมอนติคาโล

การกำหนดราคาของหลักทรัพย์โดยวิธีของผู้เป็นกลางต่อความเสี่ยงซึ่งใช้วิธีมอนติคาโลช่วยระบุค่าที่คาดของราคาหลักทรัพย์ในอนาคตให้ผลพลอยได้เป็นราคาของหลักทรัพย์ที่อาจเกิดขึ้น ภายใต้สถานการณ์ที่หลากหลายในอนาคตเป็น $f_T(\varepsilon_1)$ $f_T(\varepsilon_2)$ $\ldots$ $f_T(\varepsilon_N)$ ราคาที่อาจเป็นไปได้ในอนาคตเหล่านี้มีประโยชน์ต่อการระบุมูลค่าความเสี่ยงของหลักทรัพย์ f ที่ผู้วิเคราะห์สนใจ

ในการระบุมูลค่าความเสี่ยงของหลักทรัพย์ที่ครอบคลุมระยะเวลาการถือครองไปเป็นเวลา τ วัน ณ ระดับ α ที่กำหนดนั้น ผู้วิเคราะห์ย่อมสนใจราคาของหลักทรัพย์ที่อาจจะเกิดขึ้นได้อีกใน τ วันข้างหน้า โดยราคานี้เป็นราคา $f_{\tau|\alpha}$ มีลักษณะเฉพาะเจาะจงที่ราคาที่อาจจะเกิดขึ้นจริงในอีก τ วันข้างหน้า จะมีโอกาสต่ำกว่าราคา $f_{\tau|\alpha}$ บาท ที่ผู้วิเคราะห์ระบุ ไม่เกิน α ครั้ง สำหรับการลงทุนซ้ำๆ กัน 100 ครั้ง เมื่อผู้วิเคราะห์ระบุราคา $f_{\tau|\alpha}$ นี้แล้ว ผู้วิเคราะห์สามารถคำนวณมูลค่าความเสี่ยงของหลักทรัพย์ f ได้เท่ากับ

$$VaR(\alpha) = f_{\tau|\alpha} - f_0 \tag{2.31}$$

ราคา $f_T(\varepsilon_1)$ $f_T(\varepsilon_2)$ $\ldots$ $f_T(\varepsilon_N)$ ซึ่งเป็นผลของการระบุราคาที่อาจจะเป็นไปได้ตามวิธีมอนติคาโลนี้สามารถใช้เพื่อระบุราคา $f_{\tau|\alpha}$ ที่ผู้วิเคราะห์สนใจได้ สังเกตว่าในโลกที่ผู้ลงทุนเป็นกลางต่อความเสี่ยง ถ้าราคาของหลักทรัพย์ f ณ เวลาที่ T อยู่ที่ $f_T(\varepsilon_i)$ แล้ว ราคา ณ วันที่ τ จะต้องเท่ากับ

$$f_\tau(\varepsilon_i) = \exp\{-y(T-\tau)\} f_T(\varepsilon_i) \tag{2.32}$$

ซึ่งผู้วิเคราะห์สามารถใช้ผลของสมการที่ (2.32) ไปประบุราคา $f_{\tau|\alpha}$ ที่สนใจว่าเป็นราคา $f_T(\varepsilon_i)$ ตรงกับเปอร์เซ็นไทล์ที่ α (α percentile) นั่นเอง
(อัญญา ขันธวิทย์, 2547)

2.2 สรุปสาระสำคัญจากเอกสารที่เกี่ยวข้อง

Glasserman, Heidelberger และ Shahabudin (2000) ได้ทำการศึกษาเรื่องวิธีมอนติคาโลที่มีประสิทธิภาพสำหรับความเสี่ยง (Efficient Monte Carlo method for Value-at-risk) การศึกษาได้แสดงให้เห็นว่าการคำนวณความเสี่ยงของพอร์ทโฟลิโอที่มีขนาดใหญ่ทำให้ต้องเลือกระหว่างความรวดเร็วและความแม่นยำ ซึ่งวิธีการที่ได้ความรวดเร็วนั้นก็จะได้การประมาณที่หยาบ และวิธีการที่จะให้ได้ผลใกล้เคียงความเป็นจริงมากที่สุดก็มักจะให้ผลช้าเกินกว่าจะนำไปใช้ การศึกษานี้ได้อธิบายถึงวิธีที่ดีที่สุดของทั้งสองวิธีการ โดยผู้ศึกษาได้ทำการประมาณค่าเดลต้า แกมม่า เพื่อเป็นแนวทางในการสุ่มตัวอย่าง ซึ่งสามารถช่วยลดจำนวนตัวอย่างที่ต้องการได้

Cvitanic, Goukasian and Zapatero (2000) ได้ศึกษาเรื่องการกระจายความเสี่ยงด้วยการเลียนแบบมอนติคาโล (Hedging with Monte Carlo Simulation) การศึกษานี้ได้แนะนำกระบวนการที่เป็นทางเลือกซึ่งเป็นตัวแทนของเซมิมาร์ติงเกลของการเคลื่อนไหวของหลักทรัพย์ใดๆที่มากเกินไปและประกอบด้วยการกู้คืนของเทอมที่เป็นตัวแทนที่ไม่แน่นอน กระบวนการที่ผู้ศึกษาได้แนะนำนี้มีข้อดีคือ ต้นทุนจากการคำนวณนั้นเป็นอิสระจากจำนวนมิติ ซึ่งต่างจากวิธีดั้งเดิมคือ ต้นทุนจะเพิ่มตามจำนวนมิติ

Conrad ได้ศึกษาเรื่องการวิเคราะห์ความเสี่ยงของข้อมูลการลงทุนในหลักทรัพย์ด้วยการเลียนแบบมอนติคาโล (Analyzing the Risks of Information Security Investments with Monte-Carlo Simulations) การศึกษานี้ได้อธิบายถึงกระบวนการและประโยชน์ของวิธีการมอนติคาโลสำหรับการวิเคราะห์ความไม่แน่นอนในข้อมูลการลงทุนในหลักทรัพย์ วิธีการมอนติคาโลสามารถจับความไม่แน่นอนในปัจจัยของหลักทรัพย์ในแบบจำลองและอธิบายผลที่มีต่อการทำนายของแบบจำลอง